Vectores Aleatorias

Sea $\mathcal{S}$ un espacio muestral, diremos que $(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ es un vector aleatorio de dimension k si cada una de sus componentes es una variable aleatoria $X_i : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, para $i = 1 \cdots, k$. Notemos que el vector aleatorio es una funcion definida en $\mathcal{S}$ que toma valores en $\mathbb{R}^k$.

$k = 2$: Vectores (X, Y)

- puntual conjunta $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$
- marginales: $p_X(x) = \sum_y p(x, y)$, $p_Y(y) = \sum_x p(x, y)$
- Esperanza de una función de un vector:
  $E[h(X, Y)] = \sum_{x,y} h(x, y) p_{X,Y}(x, y)$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Vectores independientes

- $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(X \in B)$
- $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$
- $E[X.Y] = E[X]E[Y]$.

Covarianza

- $cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$, $\mu_X = E[X]$, $\mu_Y = E[Y]$
- Fórmula reducida: $cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$.
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y)$
- X, Y independientes, entonces $cov(X, Y) = 0$ y por consiguiente $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$.
- $cov(X, X) = V(X)$
- $cov(aX, bY) = ab\, cov(X, Y)$.

Generalización

$$X_1, \ldots, X_n \text{ , variables aleatorias}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right]$$

$$X_1, \ldots, X_n \text{ independientes, entonces } V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right)$$

Suma de Normales independientes

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, independientes, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

Muestra

Diremos que $X_1, \ldots, X_n$ son una muestra si son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuídas.

$$X_1, \ldots, X_n \text{ , i.i.d.}$$

En tal caso, $X_i \sim F$ para todo i, y por consiguiente,

- $P(X_i \leq t) = P(X_j \leq t) = P(X_1 \leq t)$
- $E[X_i] = E[X_j] = E[X_1]$
- $V(X_i) = V(X_j) = V(X_1)$.
- mongo(X_i)=mongo(X_j)=mongo(X_1).

Promedios

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., con $E[X_i] = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$, para todo i.
- Notación para el promedio:

$$\overline{X} = \overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$E[\overline{X}_n] = \mu \, , V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Ley de los grandes números (LGN)- Parta I

Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leq \varepsilon\right) = 1$$

Convergencia en Probabilidad

- Sean $(Y_n)_{n\geq 1}$, Y variables aleatorias.
- Diremos que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge a Y en probabilidad si para todo $\epsilon > 0$
$$\lim_{n\to\infty} P\left(|Y_n - Y| > \varepsilon\right) = 0$$
- Notación: $Y_n \to Y$ en probabilidad
- Demostramos que si $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces $\overline{X}_n \to \mu$ en probabilidad.

Ejemplo:

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(3, 4^2)$. Encontrar n_0 de forma tal que $\forall n \geq n_0$

$$P\left(|\overline{X}_n - 3| \leq 0.01\right) \geq 0.9$$

Ejemplo: continuación

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 4^2)$. Encontrar n_0 de forma tal que $\forall n \geq n_0$

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leq 0.01\right) \geq 0.9$$

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$. Encontrar n_0 de forma tal que $\forall n \geq n_0$

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leq 0.01\right) \geq 0.9$$

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 3^2)$. Encontrar n_0 de forma tal que $\forall n \geq n_0$

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leq 0.01\right) \geq 0.9$$

Ejemplo: sigue...

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 2^2)$. Encontrar n_0 de forma tal que $\forall n \geq n_0$

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leq 0.01\right) \geq 0.95$$

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$. Encontrar n_0 de forma tal que $\forall n \geq n_0$

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leq 0.01\right) \geq 0.95$$

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 3^2)$. Encontrar n_0 de forma tal que $\forall n \geq n_0$

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leq 0.01\right) \geq 0.95$$