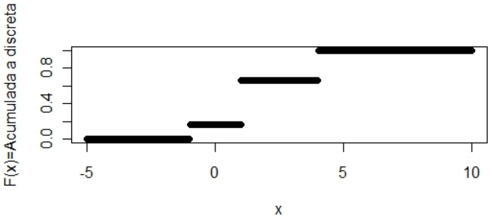
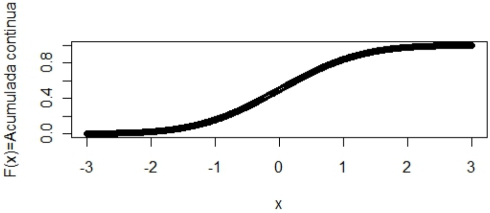
Variables Aleatorias

- X variable aleatoria. $X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$.
- $\mathbb{P}(X \leq 5)$, $\mathbb{P}(X \in A)$, $\mathbb{E}[X]$
- Funcion de distribución acumulada: $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, dada por

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

Función de distribución Acumulada: $F_X(x) = P(X \leq x)$:





Varibles Aleatorias Discretas

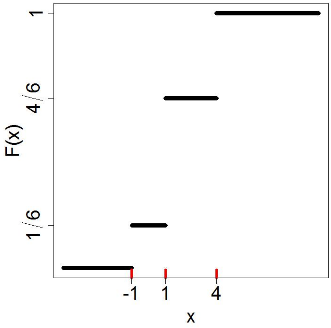
- existe A numerable tal que $\mathbb{P}(X \in A) = 1$.
- Función de probabilidad puntual $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$.
- $Rg(X) = \{x_i : p_X(x_i) > 0\}$.
- $\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x_i \in B \cap Rg(X)} p_X(x_i)$
- $F_X(t) = \sum_{x_i \leq t} p_X(x_i)$.
- F_X queda unívocamente determinada por p_X.

Variables Discretas

- Función de probabilidad puntual

x	-1	1	4
$p_X(x)$	$1/6$	$3/6$	$2/6$

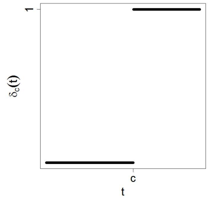
- Función de distribución acumulada



Variables Discretas

- Acumulada de una constante:

$$F_c(t) = \mathbb{P}(c \leq t) = \delta_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq c \end{cases}$$



Esperanza - Varianza

- X v.a. discreta. $Rg(X) = \{x_i : i \geq 1\}$. F.P.P. $p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$.
- Definición: $\mathbb{E}[X] = \sum x_i p_X(x_i)$, Notación: $\mu_X = \mathbb{E}[X]$.
- Lemma: $\mathbb{E}[g(X)] = \sum g(x_i) p_X(x_i)$
- Definición: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2]$
- Fórmula reducida: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$.

Variables Discretas famosas: Bernoulli

- Dos posibles resultados: 1(exito), 0 (fracaso).
- $Rg(X) = \{0, 1\}$, $p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1 - p$.
- $X \sim \mathcal{B}(1, p)$.
- $\mathbb{E}[X] = p$, $V(X) = p(1 - p)$

Variables Discretas famosas: Binomial

- X: número de exitos en n repeticiones independientes de ensayos Bernoulli con probabilidad de exito p en cada repetición.

- $Rg(X) = \{0, 1, \ldots, n\}$, $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

- Notación: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
- $\mathbb{E}[X] = np$, $V(X) = np(1-p)$

Binomial: Ejemplo 1

El 80% de los alumnos de la universidad son admitidos para continuar sus estudios en universidades Americanas. Si tres alumnos aplican el proximo año, cual es la probabilidad de que dos de ellos sean admitidos?

Binomial: Ejemplo 2

Si 7% de las piezas producidas por una fábrica presentan defectos, cuál es la probabilidad de que al examinar 4 piezas sólo una de ellas esté fallada?

Binomial: Ejemplo 3

En cierta zona industrial, 7 de las 12 industrias existentes están en regla. 3 inspectores deciden visitar cada uno de ellos una de las empresas, en forma independiente. (están peleados y no se hablan entre si). Cada uno de ellos pasa su informe y considere X la cantidad de informes correspondientes a empresas en regla. Obtenga la función de probabilidad puntual de X.

Mas generalmente, considere una urna con 5 bolillas blancas y 7 bolillas rojas. Se extraen 3 bolillas CON REPOSICION. Sea X el número de bolillas rojas

Variables Discretas famosas: Poisson

- $X =$ Cantidad de ...
- $Rg(X) = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Puntual: existe $\lambda > 0$ tal que

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k \geq 0.$$

- $X \sim P(\lambda)$.
- $\mathbb{E}[X] = \lambda$, $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

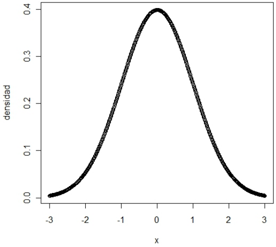
Poisson: Ejemplo

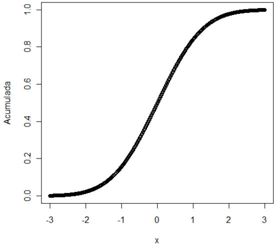
Un minorista ha verificado que la demanda semanal de cajones de cierto producto es una v.a. con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2$. Los lunes por la mañana se stockea con 4 cajones para toda la semana. Al efectuar un análisis de la actividad de su negocio, se le plantean las siguientes preguntas:

1. Cuál es la probabilidad de vender todo su stock durante la semana?
2. Cuál es la probabilidad de que sea incapaz de cumplir con un pedido por lo menos?
3. Cuál es la distribucion del número de cajones vendidos en una semana?

Variables aleatorias (absolutamente) continuas

- Función de densidad: $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Función de distribución acumulada: $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)du$.





Percentiles

X v.a. continua, $\alpha \in (0, 1)$. Definimos el α percentil de X como el valor x_α que verifica

$$F_X(x_\alpha) \;=\; \alpha \;.$$

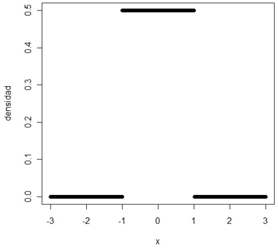
- Cuando $\alpha = 1/2$, el valor para el cual la acumulada vale $1/2$ se dice mediana.
- Los percentiles asociados a $\alpha = 1/4$ y $\alpha = 3/4$ se dicen cuartiles.

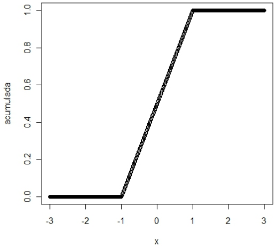
Continuas famosas: Uniforme

- densidad: existen $a < b$ de forma tal que

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

- $X \sim \mathcal{U}[a,b]$.





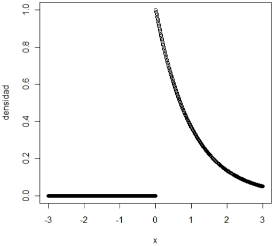
- $\mathbb{E}[X] = (a+b)/2, \; V(X) = (b-a)^2/12.$

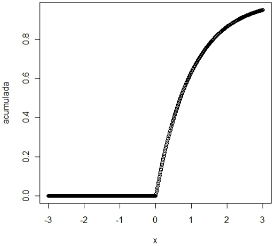
Continuas famosas: Exponencial

- densidad:$\lambda > 0$ de forma tal que

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x).$$

- $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.





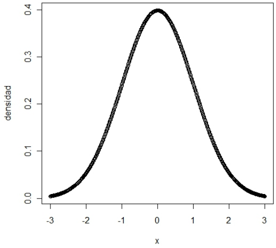
- $F_X(x) = 0$ para $x < 0$ y $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$.
- Notación: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.
- Propiedad: perdida de memoria.
  $P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$

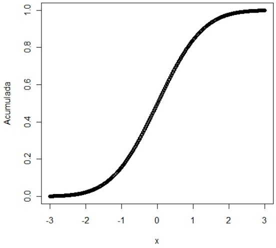
Continuas famosas: Normal

- densidad: existen $\mu \in \mathbb{R}$ y σ^2 de forma tal que

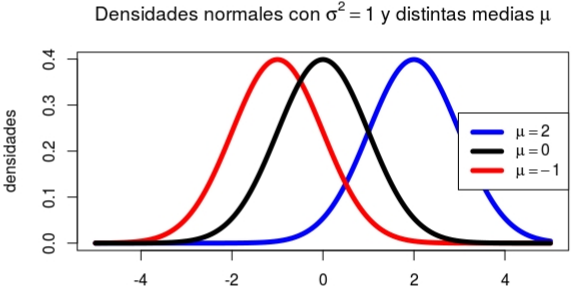
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

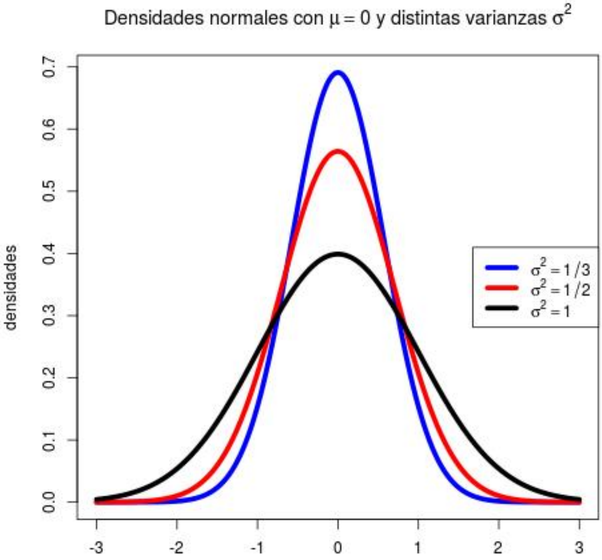




Continuas famosas: Normal



Continuas famosas: Normal



Normal: Ejemplos (Miller)

- *Nivel de iones de sodio en orina (usando un electrodo selectivo)*
- *Concentración de mercurio en una gas comercial*
- *Concentración de plomo en el torrente sanguíneo de niños de una escuela cercana a ruta de gran caudal*
- *El producto de solubilidad del sulfato de bario*

Estandarización: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- *express X in terms of its deviation from the mean in units of the standard deviation (Miller)*
- *expresar X en términos de su desviación respecto de su media en unidades de desvío estandard*

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\frac{X - \mu}{\sigma} = Z, \; Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$