

## Suma de Variable independientes

- $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$  indep, entonces

$$X_1 + \dots + X_k \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2)$$

- $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$  indep, entonces

$$X_1 + \dots + X_k \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2 + \dots + n_k, p)$$

- $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$  indep, entonces

$$X_1 + \dots + X_k \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)$$

## Promedio de normales

- $(X_i)_{i \geq 1}$  i.i.d.,  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Promedio:  $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$
- $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 2(1 - \Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma))$$

## En particular

Sean  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.,  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .  $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ .

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \leq \varepsilon) \geq 1 - \alpha$$

si y solo si

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \alpha$$

si y solo si

$$\left( \frac{\sigma \phi^{-1}\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)}{\varepsilon} \right)^2 \leq n$$

siendo que

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 2(1 - \Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma))$$

# Desigualdades

- Markov:  $X \geq 0$ , entonces para todo  $\delta > 0$  vale que

$$P(X \geq \delta) \leq \frac{E[X]}{\delta}$$

- Chebishev:

$$P(|W - E[W]| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(W)}{\varepsilon^2}$$

## Teorema: Ley de los grandes números (LGN)

Sean  $(X_i)_{i \geq 1}$  i.i.d., con  $E[X_i] = \mu$  y  $V(X_i) = \sigma^2$ , para todo  $i$ .  
Entonces, el promedio converge a  $\mu$  en probabilidad:

$$\bar{X}_n \rightarrow \mu \text{ en probabilidad}$$

Es decir, para todo  $\varepsilon > 0$ , vale que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$

# Ley de los grandes números: Método de Monte carlo

- Método numérico para estimar probabilidades *complicadas*
- Método numérico para aproximar integrales - Tesis Factorovich.

## Teorema Central del Límite (TCL):

Sean  $(X_i)_{i \geq 1}$  variables aleatorias i.i.d. con  $E[X] = \mu$  y  $V(X) = \sigma^2$ , entonces tenemos que

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

equivalentemente

$$P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notación:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim^a Z, \quad \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \sim^a Z, \quad \text{donde } Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

## Ejemplo

Una profesora utiliza un dado equilibrado de seis caras para calificar las pruebas de sus alumnos. Para aprobar la materia es necesario tener un promedio mayor o igual a tres.

- Calcular la probabilidad de que Felipe apruebe la materia si se toma un único examen.
- Si se toman dos exámenes, que valores puede tomar el promedio?
- Calcular la probabilidad de que Felipe apruebe la materia si se toman dos exámenes.
- Felipe afirma que la probabilidad de aprobar converge a uno si el número de exámenes crece a infinito. Tiene Felipe razón?
- Calcule en forma aproximada la probabilidad de que Felipe apruebe la materia si le toman  $n = 35$  exámenes.
- Cuántos exámenes se necesitan para que al menos el 99% del curso apruebe la materia ?

# Datos

- Mediciones de concentración de sal en una misma sopa.
- Mediciones de concentración de sal en diferentes sopas.

# Datos

- Mediciones de concentración de sal en una misma sopa.
- Mediciones de concentración de sal en diferentes sopas.
- Plomo en sangre en habitantes de cierta población
- Cantidad de calorías ingeridas por mujeres entre 50 y 60 años.
- Mensajes de whatsapp enviados por día por jóvenes de escuela secundaria.
- Horas por día dedicadas al estudio
- Horas por semana dedicadas al deporte
- Notas

## Primeros datos

Se realizan diez replicas del análisis de la concentración de mercurio en una muestra de condensado de gas comercial, con los siguientes resultados:

23.322.521.921.519.921.321.723.822.624.7 *ngml* – 1

(Shafawi, A., Ebdon, L., Foulkes, M., Stockwell, P. and Corns, W., 1999, Analyst, 124: 185) Calcule la media, el desvío estandard y ...  
Seis replicas de otro gas dieron los siguientes resultados

13.814.013.211.912.012.1 *ngml* – 1

Repetir los cálculos realizados.