Estadística (Q)

Listado de ejercicios para las clases prácticas de la primer semana (A)

(Los ejercicios 1 al 6 corresponden a temas de la Práctica 1, del 7 al 13 corresponden a la Práctica 2)

A 1. Supongamos que tiramos dos dados (de 6 caras, equilibrados).

(a) Describir un espacio muestral de este experimento que sea equiprobable.

(b) Calcular la probabilidad de que en las dos tiradas hayan salido un 4 y un 1 en algún orden.

(c) Calcular la probabilidad de que en las tiradas hayan salido dos 5.

(d) Calcular la probabilidad de que el número obtenido en la segunda tirada sea estrictamente mayor al obtenido en la primera.

A 2. Tenemos una bolsa con 7 bolitas blancas y 4 bolitas rojas. Sacamos 3 bolitas al azar con reposición.

(a) Describir un espacio muestral de este experimento que sea equiprobable.

(b) Hallar la probabilidad de que en las dos primeras extracciones hayan salido bolitas rojas y en la última haya salido una bolita blanca.

(c) Calcular la probabilidad de que haya salido al menos una bolita roja en las tres extracciones.

(d) Repetir los ítems anteriores para extracciones sin reposición.

Definición : número combinatorio

Dados n objetos distintos, nos preguntamos cuántas formas distintas hay de elegir k de ellos (sin importar el orden en que los elijo). La respuesta a esta pregunta es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

donde $n! = 1.2.3\ldots n$. Por ejemplo, si tenemos 5 objetos distintos y solo nos dejan elegir 2 de ellos para llevar a una isla perdida, tenemos $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$ posibilidades.

A 3. En un campamento hay 12 chicos y los queremos dividir en tres equipos (rojo, blanco y azul) de 4 chicos cada uno, ¿cuántas formas distintas hay de hacer la división?

A 4. El equipo A jugó 10 partidos en un torneo, en los que obtuvo 7 éxitos (o triunfos) y 3 fracasos (o derrotas).

(a) ¿De cuántas maneras pudieron haber ocurrido estos resultados a lo largo del torneo, tomando en cuenta el orden?

(b) Responder a la pregunta anterior si en total hubiera obtenido 6 éxitos y 4 fracasos.

(c) Ídem con 9 éxitos y 1 fracaso.

(d) Ídem con 10 éxitos.

A 5. Se analiza una cantidad de muestras de tres variedades de jugo (A, B, C) y se las clasifica según su contenido energético (medido en kcal. por 100ml.) en dos niveles: alto o bajo. El resultado del conteo de muestras según esta clasificación se presenta, en forma incompleta, en la siguiente tabla

	A	B	C	Total
Alto	15 %		20 %	55 %
Bajo	5 %	25 %		
Total		45 %	35 %	100 %

(a) Completar la tabla.

(b) Se elige al azar una de estas muestras, ¿cuál es la probabilidad de que

i. la muestra seleccionada sea de la variedad C?

ii. la muestra seleccionada sea de la variedad A y resulte de bajo contenido energético?

iii. sabiendo que resultó de alto contenido energético, no sea de la variedad B?

iv. sabiendo que no resultó de la variedad A, sea de contenido energético bajo?

v. sea de la variedad A o de contenido energético bajo?

(c) Un fabricante asegura que la variedad de jugo A es la que tiene mayor contenido energético entre las variedades de jugo analizadas. Los resultados obtenidos, ¿apoyan esta afirmación? ¿Qué probabilidades deben ser comparadas para analizar lo dicho por el fabricante?

(d) ¿Son los eventos "la muestra elegida es de variedad A" y "la muestra elegida es de bajo contenido energético" independientes?

A 6. En una urna con 5 bolitas rojas, 3 blancas y 4 verdes, se realizan 2 extracciones de bolitas y se observa el color de las bolitas extraídas.

(a) Extracciones con reposición: Si las 2 extracciones se hacen con reposición (es decir, se devuelve al bolillero la bolita extraída antes de hacer la siguiente extracción), calcular las siguientes probabilidades.

i. Hallar la probabilidad de que la primera bolita extraída sea roja.

ii. Hallar la probabilidad de que la segunda bolita extraída sea roja sabiendo que la primera bolita extraída es roja.

iii. Hallar la probabilidad de que las dos bolitas extraídas sean rojas

iv. Hallar la probabilidad de que la segunda bolita extraída sea roja.

v. Hallar la probabilidad de que se extraiga una bolita blanca y una roja.

vi. Hallar la probabilidad de que las dos bolitas extraídas sean del mismo color.

vii Hallar la probabilidad de que alguna de las bolitas sea verde.

(b) Extracciones sin reposición: Si las 2 extracciones se hacen sin reposición (es decir, una vez extraída una bolita ésta no se devuelve al bolillero), repetir el cálculo de las probabilidades anteriores.

A 7. Un juego de azar consiste en arrojar 3 veces una moneda equilibrada. Para participar del juego hay que pagar \$2. Si sale a lo sumo una cara no se recibe nada, si salen 2 caras el jugador recibe \$3 y si salen 3 caras recibe \$5. Se define la variable aleatoria X =ganancia neta del jugador.

(a) Determinar el rango de X (R_X), es decir el conjunto de todos los valores que puede tomar la v.a. X.

(b) Hallar su función de probabilidad puntual p_X y graficarla.

(c) Calcular $P(X > 0), P(-2 \leq X \leq 1), P(-2 < X \leq 1), P(X \leq -1)$.

(d) Hallar la función de distribución acumulada F_X y graficarla.

A 8. Se arroja un octaedro (cuyas caras están numeradas del 1 al 8) y se observa el número obtenido. Definamos los eventos $C_1 = \{4, 5, 6, 8\}, C_2 = \{1, 3, 7, 8\}, C_3 = \{1, 2, 3, 8\}$. ¿Son independientes estos tres eventos?

A 9. Un apostador tiene la opción de jugar a dos juegos de azar con los dados. El juego A le paga \$30 si al arrojar un dado sale 1 ó 5 y \$3 si sale cualquier otro valor. Cuesta \$15 jugar a este juego. El juego B le paga \$30 si el resultado del dado es 6, \$24 si dicho resultado es un 4, \$6 si sale un 2 y no recibe premio si sale cualquier otro valor. Cuesta \$12 jugar a este juego. Hallar la esperanza y varianza de la ganancia neta para cada juego. ¿A cuál le conviene jugar?

A 10. En un laboratorio se produce una reacción entre dos compuestos químicos de la que se obtienen 100 gr de cierto medicamento. Pero la reacción resulta exitosa sólo el 82% de las veces y en el caso en que no se produce hay que desechar los compuestos utilizados. Considere el experimento que consiste en provocar 10 veces dicha reacción de manera independiente.

(a) Calcular la probabilidad de que, al realizar una vez el experimento,
   i. la reacción resulte existosa exactamente 3 veces
   ii. la reacción resulte existosa entre 3 y 5 veces
   iii. la reacción resulte existosa a lo sumo 8 veces
(b) Calcular la cantidad esperada de reacciones exitosas al realizar una vez el experimento.
(c) Los 100 gramos de medicamento se venden a $150 y el costo de los químicos utilizados en cada reacción es de $25.5. Calcular la ganancia neta esperada al realizar una vez el experimento, asumiendo que se vende todo el medicamento producido.
(d) Supongamos que el laboratorio realiza el experimento una vez por día y que cada experimento se considera aceptable si la reacción resulta exitosa al menos 9 veces. Considere la variable aleatoria Y que cuenta la cantidad experimentos aceptables que realiza el laboratorio en 20 días. ¿Qué distribución tiene Y? ¿Cuál es la cantidad esperada de experimentos aceptables en los 20 días?

A 11. El número de cierto tipo de larvas en un estanque tiene una distribución de Poisson de párametro $\lambda = 3$ por cm^3 de agua.

(a) Calcule la probabilidad de que una muestra de 1 cm^3 contenga 4 o más larvas.
(b) Si ahora se toman en forma independiente 5 muestras de 1 cm^3 de volumen cada una. Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellas contengas 4 o más larvas?

A 12. La administración de una universidad le asegura a un matemático que él tiene sólo una posibilidad en 10000 de encontrarse atrapado en un catastrófico ascensor en el edificio donde se encuentra el departamento de mátematicas. Si él va a trabajar 5 días a la semana, 52 semanas al año, durante 10 años y siempre toma el ascensor. Supondremos que los resultados de los distintos días son independientes.

(a) Sea X la cantidad de veces que el matemático queda atrapado en el catastrófico ascensor al subir, en los 10 años en los que trabaja en esta universidad, ¿qué distribución tiene X?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que nunca quede encerrado en el ascensor al subir? ¿Cuál es la probabilidad de que se quede encerrado una vez al subir? ¿Dos veces? Exprese las probabilidades pedidas usando la variable X. Si puede calcúlela y sino calcúlela de forma aproximada.

A 13. La cantidad de tiempo, en minutos, que una persona debe esperar el colectivo de una cierta línea los días de semana por la mañana es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[0, 15]$.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que espere entre 5 y 10 minutos?
(b) ¿Cuál es el tiempo medio de espera?
(c) Aproximadamente el 80% de las veces espera menos de .... minutos. Completar y justificar.
(d) Si Juan acaba de llegar a la parada, ¿cuál es la probabilidad de que espere a lo sumo 3 minutos?
(e) Si Juan está esperando el colectivo hace 10 minutos y todavía no llegó, ¿cuál es la probabilidad de que llegue dentro de los próximos 3 minutos? Comparar con el ítem anterior.
(f) Una persona debe tomar el colectivo a las 8:30 para llegar a tiempo a su trabajo.
   i. ¿A qué hora debería llegar a la parada para tener un 80% de probabilidades de llegar a tiempo?
   ii. Supongamos que la persona llega a la parada todas las mañanas a la hora calculada en el ítem anterior.¿Cuál es la probabilidad de que no llegue tarde ningún día de una semana? ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde exactamente dos días de una semana?