ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) — Verano 2017

Práctica 9 — Matrices de Markov

1. Determinar cuáles de las siguientes matrices son de Markov.

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0{,}5 \\ -\frac{1}{2} & 0{,}5 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0{,}5 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

2. Se tiene una matriz de Markov $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$.

Verificar que el vector $V = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7})^t$ es un estado de equilibrio del proceso.

3. Sea $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ la matriz de Markov y sea $V(2) = (\frac{7}{18}, \frac{11}{18})^t$ el segundo estado del proceso. Verificar que M es inversible y calcular $V(0)$ y $V(1)$.

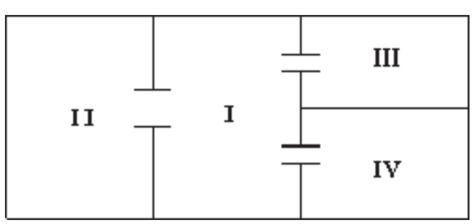
4. La población en estudio está distribuida en un territorio dividido en dos sectores. Esta población es constante y se desplaza. En el momento inicial, exactamente la mitad de la población está en cada sector. Al día siguiente se observa que el 75 % de la población del Sector 1 se ha desplazado al Sector 2, mientras que 1 de cada 10 especímenes que estaban en el Sector 2 pasó al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene.

a) Determinar la matriz de transición y el estado inicial que rigen el proceso.

b) Calcular los cinco primeros estados del proceso.

c) Verificar que el vector $V = (\frac{2}{17}, \frac{15}{17})^t$ es estado de equilibrio.

5. En el instante inicial 21 ratones se encuentran en la casilla I (ver diagrama). Cada hora los ratones de cada uno de los cuatro compartimentos se quedan en el compartimento en el que están o pasan a cualquiera de los compartimentos vecinos, *en proporciones iguales*. Se realizan observaciones cada hora y se registra el nuevo estado.



a) Determinar la matriz de transición de este proceso.

b) Determinar el vector de estado después de 4 horas.

c) Decidir si existe o no un estado de equilibrio.

6. Sea $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & a+\frac{1}{10} & b+\frac{1}{10} \\ b & a & 2a \\ b & b+\frac{1}{10} & \frac{1}{2}a \end{pmatrix}$$

a) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales M resulta ser una matriz de Markov.

b) Para los valores de a y b hallados, decidir si hay dos vectores de equilibrio de M que sean linealmente independientes. En caso afirmativo, hallarlos.

c) Para los valores a y b hallados, verificar que M^t es también una matriz de Markov. ¿Es casualidad o una ley general?

7. Un país, cuya población es constante, está dividido en dos regiones. Cada año 1 de cada 10 residentes de la región A se traslada a la región B mientras que 1 de cada 5 habitantes de la zona B se muda a la región A. En el instante inicial (ahora) viven 6 millones en la región A y 30 millones en la B.

a) Escribir la matriz de transición del proceso.

b) Determinar si existe un estado de equilibrio.

c) Calcular el estado de la población dentro de 10 años y dentro de 30 años.

8. La compañía de camiones de transporte de cargas *La Francesa* opera en Boulogne, Laferrere y Longchamps. Cada día, la mitad de los camiones que están en Boulogne se traslada a Laferrere y la otra mitad a Longchamps. De los camiones que están en Laferrere, un tercio viaja a Boulogne y otro tercio a Longchamps. Todos los camiones que están en Longchamps viajan a Boulogne.

a) Armar la matriz de transición M que describe este proceso.

b) Si el estado actual está dado por $V = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})^t$, determinar el estado siguiente.

c) Analizar el comportamiento de M^n para valores de n grandes.

d) Decidir si existe un estado límite.

9. Sea $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz de Markov de la que se sabe que:

- $m_{12} = m_{13} = 0$.
- $m_{22} + m_{23} = \frac{9}{10}$.
- $\mathrm{tr}(M) = \frac{5}{2}$.
- $\det(M) = \frac{1}{2}$.

a) Hallar todos los autovalores de M.

b) Sabiendo que el vector $(1, 2, 3)^t$ resulta estado límite del proceso para cierto vector de estado inicial, hallar la matriz M.

c) Decidir si hay dos vectores linealmente independientes que sean estados de equilibrio.

d) Determinar si existe M_∞.

10. La población en estudio es constante y está distribuida en un territorio dividido en tres sectores. Día a día se observan los desplazamientos: el 100 % de la población del Sector 1 se desplaza al Sector 2, el 100 % de la población del Sector 2 se ha desplaza al Sector 1, mientras que la población del Sector 3 permanece (sin desplazarse) en su sector. Esta pauta de desplazamiento se mantiene en el tiempo.

a) Determinar la matriz de transición M que describe el proceso.

b) Decidir si hay dos estados de equilibrio que sean linealmente independientes.

c) Determinar si el proceso tiene un estado límite, y en caso afirmativo hallarlo, con una población inicial de:

   I. 200 habitantes en el Sector 1, 200 en el Sector 2 y 300 en el Sector 3.

   II. 100 habitantes en el Sector 1, 200 en el Sector 2 y 300 en el Sector 3.

d) Determinar si existe M_∞. Justificar.

11. La población en estudio es constante y está distribuida en un territorio dividido en cuatro sectores. Día a día se observan los desplazamientos: el 100 % de la población del Sector 1 se desplaza al Sector 2, el 100 % de la población del Sector 2 se ha desplaza al Sector 3, el 100 % de la población del Sector 3 se ha desplaza al Sector 4 y el 100 % de la población del Sector 4 se ha desplaza al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene en el tiempo.

a) Determinar la matriz de transición M que describe el proceso.

b) Decidir si hay dos estados de equilibrio que sean linealmente independientes.

c) Determinar si el proceso tiene un estado límite, y en caso afirmativo hallarlo, con una población inicial de:

   I. 100 habitantes en cada sector.

   II. 100 habitantes en el Sector 1, 300 en el Sector 2, 100 en el Sector 3 y 300 en el Sector 4.

d) Decidir si existe M_∞ (Sugerencia: calcular M^4).