ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) — Verano 2017

Práctica 4 — Geometría lineal

1. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales (es decir, perpendiculares) o no:

a) $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (-2, 2)$.

b) $\vec{v} = (2, -3)$; $\vec{w} = (0, 0)$.

c) $\vec{v} = (1, 1, 1)$; $\vec{w} = (1, 0, 1)$.

d) $\vec{v} = (1, -2, 4)$; $\vec{w} = (-2, 1, 1)$.

2. Hallar:

a) Tres vectores en el plano, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (2, 3)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar.

b) Todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $\vec{v} = (2, -2)$ y tienen norma 1.

c) Tres vectores de $\mathbb{R}^3$, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (1, 3, -4)$.

d) Un vector de $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ y de norma 2. ¿Es único?

e) Dos vectores ortogonales a $\vec{v} = (3, 2, 7)$ que no sean colineales (es decir, que no sean uno múltiplo del otro).

3. Hallar el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{v} = (1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1)$.

b) $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (0, 1)$.

c) $\vec{v} = (1, 2)$; $\vec{w} = (-2, 1)$.

d) $\vec{v} = (1, -1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1, 1)$.

4. Dados $\vec{u} = (3, 2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$, determinar:

a) el ángulo entre ambos vectores.

b) la norma de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

5. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ dos vectores que verifican $\|\vec{u}\| = 1$ y $\|\vec{v}\| = 3$. ¿Es posible que satisfagan que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$? Justificar.

6. Calcular el producto vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ para los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\vec{v} = (1, -2, -4)$.

b) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\vec{v} = (2, 1, -3)$.

c) $\vec{u} = (2, 1, -3)$; $\vec{v} = (1, -2, -4)$.

d) $\vec{u} = (2, 0, 0)$; $\vec{v} = (0, 0, 3)$.

En cada caso, verificar que $\vec{w}$ es ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

7. Sean $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 5, 2)$, $\vec{w} = (1, 2, 4)$ y $\vec{z} = (2, -4, 8)$. Hallar en $\mathbb{R}^3$:

a) un vector no nulo que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Es único?

b) todos los vectores que son, simultáneamente, ortogonales a $\vec{w}$ y $\vec{z}$.

c) un vector de norma 2 que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{w}$ y $\vec{z}$. ¿Es único?

8. En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta L:

a) $L: \; t(-2, 3) + (2, 2)$,
$P_1 = (2, 2)$, $P_2 = (-2, 3)$, $P_3 = (0, 0)$, $P_4 = (12, -13)$, $P_5 = (2, -1)$.

b) $L:\ t(-1,1)+(3,-3)$,
$P_1=(3,-3),\ P_2=(0,0),\ P_3=(-1,1),\ P_4=(3,4),\ \ P_5=(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

9. Graficar y dar una ecuación vectorial para la recta que:

a) pasa por $P=(-1,2)$ con vector director $v=(3,1)$.

b) pasa por $P=(1,-4)$ y $Q=(-1,-3)$.

c) es paralela a la recta $L:\ t(-2,3)+(1,-1)$ y pasa por $P=(1,-4)$.

d) es perpendicular a la recta $L:\ t(2,3)+(5,7)$ y pasa por el origen.

10. *a*) Dar una ecuación vectorial para cada una de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$:

i. $y=-2x+1$.
iii. $y=-2$.
ii. $2x-3y=5$.
iv. $x=3$.

b) Dar una ecuación implícita para cada una de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$:

i. $L:t(3,2)+(1,1)$. ii. $L:t(2,0)+(-1,3)$. iii. $L:t(0,-1)+(2,1)$.

11. En cada uno de los siguientes casos, dar una ecuación vectorial para la recta que:

a) está dirigida por $v=(0,1,0)$ y pasa por $P=(0,2,4)$.

b) pasa por los puntos $P=(-2,3,4)$ y $Q=(-1,3,1)$.

c) es paralela al eje z y pasa por $P=(1,2,3)$.

d) es perpendicular a la recta $L:\ t(1,-2,1)+(3,5,7)$ y pasa por $P=(1,9,-3)$. ¿Es única?

12. Dar la ecuación vectorial del plano dirigido por v y w que pasa por el punto P en los siguientes casos:

a) $v=(0,1,0)$, $w=(1,0,0)$, $P=(0,0,1)$.

b) $v=(0,2,0)$, $w=(1,1,0)$, $P=(-1,2,1)$.

Graficar los planos y compararlos.

13. *a*) Dar una ecuación implícita para el plano $\pi:\ t(1,1,0)+s(0,-1,2)+(-2,0,4)$.

b) Dar una ecuación vectorial para el plano $\pi:\ -x+3y+2z=1$.

14. Dar una ecuación paramétrica y una ecuación implícita para el plano que:

a) pasa por los puntos $(2,1,2),\ (1,1,1)$ y $(3,2,7)$.

b) pasa por el punto $(1,2,1)$ y es paralelo al plano que contiene a los ejes x e y.

c) es paralelo a la recta $L:\ t(1,2,-4)+(1,2,1)$ y contiene a los puntos $P=(2,2,1)$ y $Q=(1,2,-3)$.

d) contiene al punto $(-1,2,2)$ y es ortogonal a la recta $L:\ t(1,1,-1)+(-1,2,2)$.

15. *a*) Decidir si los puntos $A=(1,1,1),\ B=(-2,0,1)$ y $C=(3,0,2)$ son colineales (es decir, están sobre una misma recta) o no.

b) Decidir si los puntos $A=(8,2,4),\ B=(4,2,8),\ C=(-2,0,1)$ y $D=(1,-1,3)$ son coplanares (es decir, están sobre un mismo plano) o no.

16. Dado el plano $\pi:\ 2x-5y+3z=11$:

a) Hallar **todos** los valores de $a\in\mathbb{R}$ para los cuales $(2a,a,7)\in\pi$.

b) Decidir si existe algún valor de $a\in\mathbb{R}$ tal que $(1,3a,5a)\in\pi$.

17. Sean $\pi: \ 2x - y + 3z = 5$, $L: \ t(1,-1,-1) + (1,0,-2)$ y $L': \ t(3,5,1) + (0,1,2)$. Calcular $L \cap \pi$ y $L' \cap \pi$.

18. Determinar si las rectas L y L' resultan concurrentes, paralelas/coincidentes o alabeadas:

a) $L: \ t(1,0,-1) + (-1,1,2), \quad L': \ t(-1,1,2) + (1,0,-1)$.

b) $L: \ t(1,1,-1) + (-1,2,2), \quad L': \ t(2,2,-2) + (1,0,-1)$.

c) $L: \ t(1,\frac{1}{2},-1) + (-1,1,2), \quad L': \ t(-2,-1,2) + (3,3,-2)$.

d) $L: \ t(1,2,-1) + (-1,-1,2), \quad L': \ t(-1,1,1) + (3,2,-1)$.

En cada caso determinar si existe un plano que contenga a L y L'. Si la respuesta es afirmativa, hallarlo.

19. Determinar en qué casos los planos π_1 y π_2 se intersecan y hallar la intersección.

a) $\pi_1: \ 4x + 2y - 3z = 1; \quad \pi_2: \ 2x + y - \frac{3}{2}z = 1$.

b) $\pi_1: \ 3x - 2y - 1 = 0; \quad \pi_2$ el plano dirigido por $(0,0,1)$, $(2,3,3)$ que pasa por $(1,1,2)$.

c) π_1 el plano que pasa por $(-1,1,2)$ con vector normal $(1,2,-1)$;
π_2 el plano que pasa por $(1,1,1)$, $(2,3,1)$ y $(-1,-2,2)$.

20. Hallar ecuaciones implícitas para cada una de las rectas siguientes (es decir, describirlas como intersección de dos planos dados por ecuaciones implícitas):

a) L que es intersección del plano xy con el plano yz.

b) $L: \ t(1,0,-1) + (-1,1,2)$.

c) L que pasa por los puntos $(-5,3,7)$ y $(2,-3,3)$.

21. En cada uno de los siguientes casos, hallar la intersección de las rectas L y L':

a) $L: \ t(1,1,0) + (0,-1,2), \quad L': \begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases}$.

b) $L: \ t(1,1,0) + (0,-1,2), \quad L': \begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2x + 2y + z = 2 \end{cases}$.

22. Sean L_1 y L_2 las rectas de $\mathbb{R}^2$, $L_1: \ x - y = 1$, y $L_2: \ x + y = 3$.

a) Calcular el ángulo entre L_1 y L_2.

b) Hallar una recta L_3 tal que $\angle(L_1, L_3) = \angle(L_2, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \subset L_3$.

23. Sean $L_1: \ t(1,-2,1) + (0,0,-2)$ y L_2 la recta que pasa por $(1,4,2)$ y $(0,2,-1)$.

a) Verificar que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

b) Hallar un plano que contenga a L_1 y L_2 y determinar el ángulo entre L_1 y L_2.

24. Sea L_1 la recta que tiene dirección $(1,2,-1)$ y pasa por $(-1,3,1)$, y sea L_2 la recta que pasa por $(-1,1,3)$ y por $(1,2,7)$.

a) Verificar que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

b) Determinar una recta L_3 paralela a L_1 que interseque a L_2 en el punto $(-1,1,3)$ y hallar el ángulo entre L_3 y L_2.

25. Encontrar **todos** los puntos de la recta $L: \ t(1,-1,0) + (2,1,-1)$ que están a distancia 6 del punto $P = (2,1,-1)$.

26. Calcular la distancia entre:

a) la recta $L:\ t(1,1)+(3,0)$ y el punto $P=(-1,1)$.

b) la recta $L:\ t(1,1,0)+(3,0,0)$ y el punto $P=(-1,1,0)$.

c) el plano π que pasa por $(1,2,1)$ y tiene vector normal $(1,-1,2)$ y el punto $P=(1,2,5)$.

27. Sean $L:\ t(2,-2,-3)+(0,2,2)$ y $P=(0,-2,-1)$.

a) Hallar el plano π perpendicular a L que pasa por P y determinar $\{Q\}=L\cap\pi$.

b) Calcular $d(P,Q)$. ¿Qué significa en este problema el número $d(P,Q)$?

28. Se consideran las rectas $L_1:\ \left\{\begin{array}{rl} 2x-y-z & =4 \\ 4x-y-2z & =9 \end{array}\right.$ y $L_2:\ t(1,0,2)+(1,2,-3)$.

a) Probar que L_1 y L_2 son paralelas.

b) Hallar un plano π perpendicular a L_2 que pase por $P=(1,2,-3)$ y determinar $\{Q\}=L_1\cap\pi$.

c) Calcular $d(P,Q)$. ¿Qué significa el número $d(P,Q)$ en este problema?

29. Sean π el plano de ecuación $x+y+z=1$ y L la recta $L:\ t(-1,0,1)+(1,1,2)$.

a) Probar que L es paralela a π.

b) Hallar una recta L' ortogonal a π que pase por $P=(1,1,2)$ y determinar $\{Q\}=L'\cap\pi$.

c) Calcular $d(P,Q)$. ¿Qué significa el número $d(P,Q)$ en este problema?