Análisis I - Análisis Matemático I - Análisis II (C) - Matemática 1

Exámen Final (25/4/2017)

1	2	3	4

CALIF.

Apellido/s: No. de libreta:
Nombre/s: Carrera:

---

1. i) Enuncie y demuestre el *teorema de Lagrange* (o teorema del valor medio del cálculo diferencial) para funciones de una variable real.

   ii) Úselo para probar la desigualdad
$$\log(1+x) \leq x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \text{ con } x \geq 1$$

---

2. a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto $p \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que las derivadas direccionales de f existen en p y vienen dadas por
$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \langle \nabla f(p), v \rangle$$
para todo $v \in \mathbb{R}^2$ de norma 1.

   b) Explique porqué esta fórmula implica que el vector $\nabla f(p)$ da la dirección de máximo crecimiento de f en p (cuando es no nulo).

---

3. a) Estudiar los máximos y mínimos de $f(x,y,z) = xyz$ en el conjunto
$$C_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x+y+z \leq \alpha\}$$
para cada $\alpha > 0$.

   b) Deducir la siguiente desigualdad, válida para $x, y, z \geq 0$.:
$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

---

4. La función *gama incompleta* se define para $\alpha, x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ y $x \geq 0$ por
$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} \, e^{-t} \, dt$$

   a) Pruebe que la derivada parcial $\frac{\partial \gamma}{\partial x}(\alpha, x)$ existe si $x > 0$ y calcúlela.

   b) Deduzca que si fijamos α, $\gamma(\alpha, x)$ resulta una función continua y estricamente creciente de x.

   c) Demuestre que existe el límite
$$\Gamma(\alpha) = \lim_{x \to +\infty} \gamma(\alpha, x)$$
Sugerencia: recuerde que $e^x \geq \frac{x^k}{k!}$ si $x \in \mathbb{R}, x > 0$ y $k \in \mathbb{N}$.

   d) Pruebe que para cada $\alpha > 0$ y cada $y \in \mathbb{R}$ con $0 < y < \Gamma(\alpha)$ existe un único $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(\alpha, x_0) = y$.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS