Análisis I - Análisis Matemático I - Análisis II (C) - Matemática 1

Exámen Final (16/6/2017)

1	2	3	4

CALIF.

Apellido/s: No. de libreta:
Nombre/s: Carrera:

---

1. a) Enuncie y demuestre el *teorema de Bolzano* sobre ceros de funciones continuas en un intervalo cerrado de la recta real.
   b) Probar que la ecuación
   $$e^x = 1 + 2x$$
   tiene una única solución real positiva. Indique un intervalo $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0})$ donde pueda asegurar que la solución está.

2. *a*) Pruebe que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $p \in \mathbb{R}^2$, entonces es continua en p.
   b) Dé un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que sea continua en un punto $p \in \mathbb{R}^2$ pero no sea diferenciable en él. Justifique su respuesta.

3. Consideramos la $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la integral
   $$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$
   i) Pruebe que F es una función impar. Es decir: $F(-x) = -F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   ii) Sea $f(x) = F'(x)$ Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $P_{2n}(x)$ el polinomio de Taylor de f de orden $2n$ en un entorno de $x = 0$. Encuentre una fórmula explícita de P_{2n} y pruebe que el correspondiente resto de Taylor R_{2n} satisface que
   $$|R_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(n+1)!}$$
   Sugerencia: Aproveche algún desarrollo de Taylor conocido.
   iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $Q_{2n+1}(x)$ el polinomio de Taylor de F de orden $2n + 1$ en un entorno de $x = 0$. Encuentre una fórmula explícita de Q_{2n+1} y una cota del correspondiente resto. **Sugerencia:** Utilice el resultado del ítem anterior.

   Nota: La función de este ejercicio será importante en *Probabilidades y Estadística.*

4. Calcular la integral triple
   $$\int\int\int_D |xyz|\, dx\, dy\, dz$$
   sobre la región
   $$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS