Probabilidad y Estadística Primer Parcial Verano 2016

Nombre y apellido.. Número de libreta............

Por favor, al finalizar el examen señalar claramente aquí qué ejercicios se entregan.

Entrego ejercicios 1 2 3 4

(Reservado para el corrector):

1	2	3	4	Nota

Por favor, resolver cada ejercicio en hojas separadas. Numerar todas las hojas y colocar en cada una nombre y apellido.

Para aprobar es necesario tener al menos 60 puntos. Justificar todas las respuestas.

Ej 1. (20 p.) Para un experimento aleatorio se cuenta con un dado equilibrado y dos urnas: la urna A contiene 7 bolitas negras y 3 rojas; y la urna B contiene 2 bolitas negras y 3 rojas.

El experimento comienza arrojando el dado: si sale el uno, se extraen al azar, sucesivamente y sin repetición, dos bolitas de la urna B; pero si sale cualquier otro número, se extraen al azar dos bolitas de la urna A que se colocan en la urna B y finalmente se extrae una bolita al azar de la urna B.

(a) (5 p.) Calcular la probabilidad de que el experimento resulte en la extracción de 3 bolitas negras.

(b) (5 p.) Hallar la probabilidad de que la última bolita extraída sea roja si se sabe que no salió el uno en el dado.

(c) (5 p.) Calcular la probabilidad de que la última bolita extraída sea negra.

(d) (5 p.) Si se sabe que la última bolita extraída fue roja, hallar la probabilidad de que haya salido un uno en el dado.

Ej 2. (25 p.) La única cajera del pequeño Banco Mar atiende la caja desde las 10 h hasta las 15 h, con un descanso entre las 12.30 h y las 13.30 h (durante el cual la caja queda a cargo del dueño del banco). Supongamos que la cantidad de clientes que llegan a la caja entre las 10 h y las 15 h sigue un proceso de Poisson con una media de 6 clientes por hora.

(a) (6 p.) Hallar la probabilidad de que lleguen al menos 3 clientes durante el intervalo del mediodía.

(b) (6 p.) Si la cajera entra a trabajar 15 minutos tarde (es decir, a las 10.15 h), ¿cuál es la probabilidad de que al menos un cliente haya llegado a la caja antes que ella?

(c) (6 p.) Si la cajera llega 15 minutos tarde al trabajo los 5 días hábiles de una determinada semana, ¿cuál es la probabilidad de que en exactamente 2 de esos días no llegue ningún cliente antes que ella?

(d) (7 p.) Determinar cuán tarde, como máximo, puede entrar a trabajar la cajera si quiere que la probabilidad de que no llegue ningún cliente antes de su entrada sea al menos 1/2.

Ej 3. (30 p.) Un cierto sistema de alarma consta apenas de dos componentes, cuyas respectivas vidas útiles son variables aleatorias independientes que se distribuyen de forma notoriamente distinta. El tiempo T_1 (en años) que transcurre hasta que el componente C1 falla es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$, mientras que el tiempo T_2 (también en años) que transcurre hasta que el componente C2 falla puede aproximarse mediante una distribución $N(4, \sigma^2)$. Se sabe además que $E(T_1^3) = 48$ y que $P(2,8 < T_2 < 5,2) = 0,9836$.

(a) (8 p.) Hallar los valores de los parámetros λ y σ^2.

(b) (8 p.) Si C1 lleva 5 años funcionando sin fallas, calcular la probabilidad de que continúe así por al menos otros cinco años. Repetir para C2.

(c) (8 p.) Teniendo en cuenta que el sistema falla en cuanto falla uno de los dos componentes, hallar una expresión de la densidad de la variable T, que representa el tiempo transcurrido hasta que el sistema falla por primera vez. *(Se puede representar por $\Phi(t)$ la función de distribución de la $N(0, 1)$).*

(d) (6 p.) Sabiendo que $E(T) = 1,89$ y $Var(T) = 1,28$, dar una cota inferior para $P(0,39 < T < 3,39)$.

Ej 4. (25 p.) Dadas $X \sim \Gamma(2, 1)$ e $Y_{|X=x} \sim \mathcal{U}[0, x]$:

(a) (4 p.) Graficar en el plano el soporte de $f_{XY}(x, y)$.

(b) (6 p.) Hallar la función de densidad marginal de Y. ¿Qué distribución conocida tiene?

(c) (6 p.) Calcular $Cov(X, Y)$ y $Cov(3X, 5Y + E(X^4))$. *(Sugerencia: pensar antes de repetir cálculos.)*

(d) (3 p.) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Justificar.

(e) (6 p.) Calcular $P(Y < 1|X = 2)$ y $P(X > 3|Y = 2)$.