Análisis Matemático I (Lic. en Cs. Biológicas)

Verano 2016

Práctica 3: Límites y continuidad

Ejercicio 1. Usando las propiedades básicas de los límites de funciones calcular los siguientes límites. En cada caso indicar qué propiedades se han empleado:

(*a*) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x+2)\sqrt{3x-1}$

(*b*) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)$

(*c*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{2x+5}}{x+2}$

(*d*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

(*e*) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+5}}$ **(**$*$**)**

(*f*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{4x+1}-3}$ **(**$*$**)**

(*g*) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x+\tan\ x}{\cos(\frac{2x}{3})}$ **(**$*$**)**

(*h*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

(*i*) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(t+h)^2-t^2}{h}$ con $t\in\mathbb{R}$, t fijo **(**$*$**)**

(*j*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+9x+2}{x^2-4}$ **(**$*$**)**

(*k*) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{x^3-b^3}{x-b}$ **(**$*$**)**

(*l*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

(*m*) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{x+4}{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **(**$*$**)**

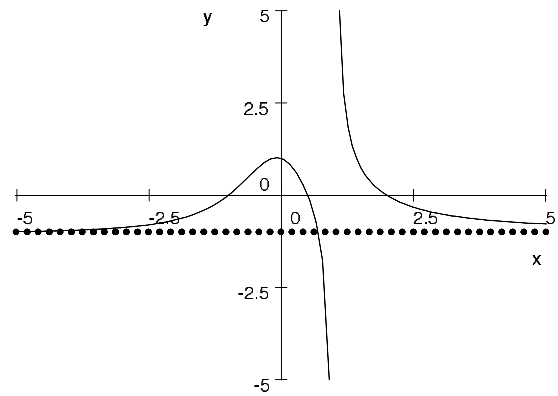
Ejercicio 2.

(*a*) Hacer un gráfico aproximado de $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

(*b*) Verificar gráficamente que vale $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

(*c*) Para cada $n\in\mathbb{N}$ calcular $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^n}$ y $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^n}$.

Ejercicio 3. Consideremos una función $f(x)$ cuyo gráfico es:



(a) Determinar el dominio de esta función y sus límites en los extremos del conjunto dominio.

(b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = -1$?

(c) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 0$?

(d) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = m$, donde m es un determinado número real? Considerar todas las posibilidades.

Ejercicio 4. Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4 - x^3 + 2}{3x^4 - 3x^2 + 1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3 + 2x^2}{3x^2 - 2x + 2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^4 + 2x^2 + 1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + 1}{-7x^2 + 3x + \sqrt{x}}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x^7 - 10x^3 + 3)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (-x^6 + x^5 + \sqrt{x})$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^7 - \sqrt{3}^{10}}{x} + 9x^7$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1} - x}{x + 5}$ **(∗)**

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln\, x - 2\ln(x+1))$ **(∗)**

(j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3^{x+1} + 2}{3^x - 5}$ **(∗)**

Ejercicio 5. De acuerdo con la Teoría de la Relatividad de Einstein, un cuerpo que en reposo tiene masa m, cuando se mueve a velocidad v su masa cambia según la expresión $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v}{c}}}$, donde c es la velocidad de la luz y m_0 es la masa inicial. ¿Qué sucede cuando $v \to c$?

Ejercicio 6. Un problema cuantitativo importante de la ciencia pesquera consiste en evaluar el número de peces hembra que desovan en los ríos y emplear esta información para extrapolar el número de peces maduros (llamados 'reclutas') que volverán a los ríos durante el siguiente período de reproducción. Si R es el número de reclutas y H el número de peces hembra del período anterior, las investigaciones cuantitativas de Beverton & Holt (1957) afirman que $R = R(H) = \dfrac{H}{\alpha H + \beta}$ donde α y β son constantes positivas. Mostrar que, de acuerdo con esta función, para un número H de hembras suficientemente grande el reclutamiento será aproximadamente constante.

Ejercicio 7. ($*$) El objetivo de este ejercicio es explicar modelos sencillos para el crecimiento de una población. Sea $N(t)$ la cantidad de miembros de una especie fija en el tiempo t. Tenemos la ecuación de la conversación de la especie dada por:

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \approx \#nacimientos(t) - \#muertes(t) + \#migraciones(t), \tag{1}$$

donde $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}$ es la variación de la cantidad de la población, $\#nacimientos(t)$ es la cantidad de nacimientos de la especie en el tiempo t, $\#muertes(t)$ es la cantidad de muertes de la especie en el tiempo t, y $\#migraciones(t)$ es la cantidad de migraciones de la especie en el tiempo t.

(*a*) (Modelo de Malthus, 1798) Supongamos que no hay migraciones de la especie a estudiar, y que el nacimiento y la muerte son proporcionales a $N(t)$. Es posible deducir de la ecuación (1) que la función $N(t)$ debe ser

$$N(t) = N_0 e^{(b-d)(t)},$$

donde b, d son dos constantes positivas, y $N_0 = N(0)$ es la población inicial de la especie. Calcular el límite $\lim_{t\to+\infty} N(t)$. Extraer conclusiones. ¿Este modelo puede ser posible?

(*b*) (Modelo de Verhust, 1838, 1845) Una hipótesis razonable para estudiar un modelo poblacional es la de suponer que hay algún tipo de auto-limitación propia del ambiente en el que crece la especie. Un modelo sencillo es el propuesto por Verhust, poniendo:

$$\#nacimientos(t) - \#muertes(t) + \#migraciones(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right),$$

donde r, K son constantes positivas, K mide la capacidad de carga del ambiente en el que está la especie a estudiar, y r es una medida de qué tan rápido se alcanza el límite K. Es posible deducir de este modelo, reemplazando en la ecuación (1) que la función $N(t)$ debe ser

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)},$$

donde $N_0 = N(0)$ es la población inicial de la especie. Calcular el límite $\lim_{t\to+\infty} N(t)$. Extraer conclusiones.

(*c*) **(∗)** Comparar los modelos de Malthus y Verhust.

Ejercicio 8. Calcular los siguientes límites:

(*a*) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$

(*b*) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2}\cos(x+\frac{1}{x})$ **(∗)**

(*c*) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-4)\sin(\frac{1}{x-2})$

(*d*) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin(h(x))$, con $h(x)$ cualquier función

(*e*) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \,.\cos[\ln(1+\frac{1}{x})]$ **(∗)**

(*f*) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}.e^{\cos\frac{1}{x}}$ **(∗)**

Ejercicio 9. Sabiendo que $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ calcular:

(*a*) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}$

(*b*) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

(*c*) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$

(*d*) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ **(∗)**

(*e*) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

(*f*) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$

(*g*) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{\tan^2(\pi x)}$ **(∗)**

(*h*) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ **(∗)**

(*i*) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ **(∗)**

(*j*) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

(*k*) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$ **(∗)**

Ejercicio 10.

(*a*) Comprobar gráficamente que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

(*b*) ¿Qué puede decir de $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n}$ y de $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n}$ para n par?

(*c*) La misma pregunta para n impar.

Ejercicio 11. Consideramos la función $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3}$

(*a*) Determinar el dominio de f.

(*b*) ¿Se puede calcular directamente $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? ¿Por qué?

(*c*) Determinar la función g definida por $g(x) = f(1+x)$.

(*d*) Calcular $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ y $\lim_{x\to 0^-} g(x)$. Deducir $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

(*e*) ¿Admite $f(x)$ asíntotas verticales u horizontales? Justificar la respuesta.

Ejercicio 12. Hallar todos los pares de números reales a y b que verifican simultáneamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax^2+bx+1}-1}{x} = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{ax^2+bx+1}-1}{x} = 2.$$

Ejercicio 13. En cada uno de los siguientes casos calcular $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Decidir si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y representar gráficamente.

(*a*) $f(x) = |3x-6|$

(*b*) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(*c*) $f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{si } x \le 0 \\ x^2+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ejercicio 14. Calcular los siguientes límites:

(*a*) $\lim_{x\to 3} (3x-5)^{\frac{1}{1-x}}$

(*b*) $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x+1}{2x-5}\right)^{\frac{x+1}{3x+1}}$

(*c*) $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\sin(2x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(*d*) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin(2x)}{x}\right)^{\frac{\tan x}{3x}}$ **(∗)**

(*e*) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2x^2+1}+1}{x}\right)^{x+1}$ **(∗)**

(*f*) $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\sin(3x^2)}{\sin(4x^2)}\right)^{\frac{1}{x}}$ **(∗)**

Ejercicio 15. Sabiendo que $\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{t\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t = e$ calcular los siguientes límites:

(*a*) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^x$

(*b*) $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$, $a \in \mathbb{R}$ fijo.

(*c*) $\lim_{h\to 0} \left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$

(*d*) $\lim_{x\to 0^+} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

(*e*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

(*f*) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h}$, $a > 0$ fijo. **(∗)**

(*g*) $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^h-1}{h}$

(*h*) $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^{a+h}-e^a}{h}$, $a \in \mathbb{R}$ fijo. **(∗)**

Ejercicio 16. (∗) Calcular los siguientes límites:

(*a*) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{1-\sin(\frac{x}{2})}{\pi - x}$

(*b*) $\lim_{x\to +\infty} x(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a})$

(*c*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(*d*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin^2 x}{x + \sin 2x}$

(*e*) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \sin\dfrac{1}{x}$

(*f*) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$

Ejercicio 17. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Mostrar que $\lim\limits_{t\to +\infty} (1 + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2})^t$ no depende de la elección de b.

Ejercicio 18. Estudiar límites laterales y ordinarios, y continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. En caso de discontinuidad, discutir el tipo:

(*a*) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ en $x = 0$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

(*c*) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ en $x = 0$

(*d*) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

(*e*) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ en $x = 2$

(*f*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x > 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x^3 - 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ en $x = 2$

(*g*) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ en $x = 2$

(*h*) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$

Ejercicio 19. ¿Cómo debe elegirse la constante A en la definición de la siguiente función, si queremos que la función f resulte continua?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ A & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 20. Determinar el conjunto de puntos de discontinuidad (en $\mathbb{R}$) de las siguientes funciones. Redefinirlas, si fuera posible, para que resulten continuas:

(*a*) $f(x) = \dfrac{x-1}{x(x^2-4)}$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

(*c*) $f(x) = \dfrac{x^{\frac{2}{3}} - 4}{2x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 2}$

(*d*) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$ **(∗)**

(*e*) $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 3 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$ **(∗)**

(*f*) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$ **(∗)**

(*g*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{x^2 - x} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(-2x+2)}{x^2+x-2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Ejercicio 21. En cada uno de los siguientes casos hallar todos los pares de números reales a y b para los que la función f resulta continua en todo $\mathbb{R}$:

$$(a)\ \ f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in(-\infty,0] \\ ax+b & \text{si } x\in(0,2) \\ x^2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

$$(b)\ \ f(x)=\begin{cases} x^3+1 & \text{si } x\leq 0 \\ ax^2+b & \text{si } 0<x<2 \\ x^2-1 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

$$(c)\ \ f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x>1 \\ ax+b & \text{si } -2\leq x\leq 1 \\ \dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2} & \text{si } x<-2 \end{cases} \quad (*)$$

Ejercicio 22. Para cada una de las siguientes funciones, estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$. Si hubiera discontinuidades, clasificarlas y, de ser posible, redefinir la función para que resulte continua.

$$(a)\ \ f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x}{x-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \frac{x^2+2x-3}{x+3} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$$(b)\ \ f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}} & \text{si } x>0 \\ 2 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{1-\cos x}{x^2+x} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$$(c)\ \ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & \text{si } x>2 \\ 1 & \text{si } x=2 \\ \dfrac{9x-18}{x^2+4x-12} & \text{si } x<2 \end{cases} \quad (*)$$

Ejercicio 23. Analizar la continuidad en $x_0=5$ de la función así definida:

$$f(x)=\begin{cases} 3xe^{x-5} & \text{si } x\leq 5 \\ \dfrac{45\,\mathrm{sen}(x-5)\ln(\frac{4}{5}x-3)}{2(x-5)}+15 & \text{si } x>5 \end{cases}$$

¿Qué se puede decir de la continuidad de f en $\mathbb{R}-\{5\}$?

Ejercicio 24. Mostrar que el polinomio $P(x)=x^3+x+1$ toma el valor cero en el intervalo $(-1;0)$.

Ejercicio 25. Mostrar que los gráficos de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=x+2$ se cortan para algún $x_0\geq 0$.

Ejercicio 26. Mostrar que existe un $x_0 \in (1, e)$ tal que $\dfrac{\ln x_0}{x_0} = \dfrac{1}{3}$.

Ejercicio 27. Determinar la existencia de raíces reales de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{4 - x^2}$ en los intervalos $[-4; -3], [-3; 3]$ y $[-1; 1]$.

Ejercicio 28. Una determinada compañía vende un producto de consumo por kg (o fracción). Para favorecer compras grandes, la productora cobra $\$1,10$ por kg en compras de menos de 8 kg, mientras que cobra $\$1$ por kg si se compra 8 kg o más.

(*a*) Expresar matemáticamente la función costo $C(x)$ donde x indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.

(*b*) ¿Es continua $C(x)$? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.

(*c*) Explicar por qué no conviene (en estas condiciones) que un cliente compre $7,5$ kg de este producto.

Ejercicio 29. (∗) La misma compañía productora del problema anterior vende un segundo producto a $\$1,20$ por kg los primeros 5 kg, y para compras mayores a 5 kg cobra $\$6$ más $\$\ 0,90$ por cada kilo que sobrepase los $\$5$.

(*a*) Expresar matemáticamente la función costo $C(x)$ donde x indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.

(*b*) ¿Es continua $C(x)$? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.