FCEyN - UBA - Curso de Verano 2016

Álgebra I
Práctica 5 - Polinomios

Números complejos

1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\mathrm{Re}(z^{-1})$, $\mathrm{Im}(z^{-1})$, $\mathrm{Re}(-i \cdot z)$ e $\mathrm{Im}(i \cdot z)$.

i) $z = (2+i)(1+3\,i)$.

ii) $z = 5\,i(1+i)^4$.

iii) $z = (\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)^2(\overline{1-3\,i})$.

iv) $z = i^{17} + \frac{1}{2}\,i(1-i)^3$.

v) $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)^{179}$.

vi) $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^{-1}$.

vii) $z = \overline{1-3\,i}^{\,-1}$.

2. Dados $z = 1+3\,i$ y $w = 4+2\,i$, representar en el plano complejo los siguientes números

i) z.

ii) w.

iii) $z+w$.

iv) $z-w$.

v) $-z$.

vi) $2z$.

vii) $\frac{1}{2}w$.

viii) iz.

ix) $\overline{z}$.

x) $\overline{3z+2w}$.

xi) $\overline{iz}$.

xii) $|z|$.

xiii) $|2z|$.

xiv) $|z+w|$.

xv) $|z-w|$.

xvi) $|\overline{w-z}|$.

3. Graficar en el plano complejo

i) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, 3\ \mathrm{Re}(z) - 1 = 2\ \mathrm{Im}(z)\}$

ii) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, -1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1 \text{ y } |z| \leq 2\}$

iii) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, 2 \leq |z-1+i| \leq 3\}$

iv) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, z.\mathrm{Im}(z).(1-i) = |z|^2\}$

v) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-2| = |z-1-i|\}$

4. Probar que

i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

ii) $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

iii) $\overline{\overline{z}} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

iv) $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{\,-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

v) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

vi) $z.\overline{z} = |z|^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

vii) $|z.w| = |z|.|w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

viii) $|z^{-1}| = |z|^{\,-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

ix) $|z+w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

x) $||z|-|w|| \leq |z-w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

xi) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$

xii) $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$

5. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

i) $z \neq 0$ y $z = \overline{z}^{\,-1}$

ii) $\mathrm{Re}(z^2) = 0$

iii) $z \neq 0$ y $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$

iv) $|z|^2 = (z+\overline{z}).\mathrm{Im}(z)$

v) $z^2 + |z^2| = i.\overline{z}$

vi) $|z-\overline{z}| = \mathrm{Re}(z)$

vii) $i(z^2+4) = z.\mathrm{Im}(z)$

viii) $z^2 = 3+4i$

ix) $z \neq 0$ y $z-1 = z^{-1}$

x) $z^2 + (1+2i)z + 2i = 0$

6. Calcular las raíces cuadradas de los siguientes números complejos z

i) $z = -36$

ii) $z = i$

iii) $z = -3-4i$

iv) $z = -15+8i$

7. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos

i) $3+\sqrt{3}\,i$.

ii) $(2+2\,i)(\sqrt{3}-i)$.

iii) $(-1-i)^{-1}$.

iv) $(-1+\sqrt{3}\,i)^5$.

v) $(-1+\sqrt{3}\,i)^{-5}$.

vi) $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-i}$.

8. Graficar en el plano complejo

i) $\{z\in\mathbb{C}-\{0\}\,/\,|z|\geq 2 \text{ y } \frac{\pi}{4}\leq \arg(z)\leq \frac{2\pi}{3}\}$.

ii) $\{z\in\mathbb{C}-\{0\}\,/\,\arg(-i\,z)>\frac{\pi}{4}\}$.

iii) $\{z\in\mathbb{C}-\{0\}\,/\,|z|<3 \text{ y } \arg(z^4)\leq\pi\}$.

9. i) Determinar la forma binomial de $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-i}\right)^{17}$.

ii) Determinar la forma binomial de $(-1+\sqrt{3}\,i)^n$ para cada $n\in\mathbb{N}$.

iii) Hallar todos los $n\in\mathbb{N}$ tales que $(\sqrt{3}-i)^n=2^{n-1}(-1+\sqrt{3}\,i)$.

10. Hallar en cada caso las raíces n-avas de $z\in\mathbb{C}$:

i) $z=8,\ n=6$

ii) $z=-4,\ n=3$

iii) $z=-1+i,\ n=7$

iv) $z=2\,i\,(\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i)^{-1}$, $n=11$

v) $z=(2-2i)^{12},\ n=6$

vi) $z=1,\ n=8$.

11. i) Calcular $1+w^2+w^{-2}+w^4+w^{-4}$ para cada $w\in G_{10}$.

ii) Calcular $w+\overline{w}+(w+w^2)^2-w^{38}(1-w^2)$ para cada $w\in G_7$.

iii) Calcular $w^{73}+\overline{w}\cdot w^9+8$ para cada $w\in G_3$.

iv) Calcular $w^{14}+w^{-8}+\overline{w}^4+\overline{w^{-3}}$ para cada $w\in G_5$.

12. Probar que $\displaystyle\prod_{\omega\in G_n}\omega=(-1)^{n-1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

13. Determinar las raíces n-ésimas *primitivas* de la unidad para $n=2,3,4,5,6$ y 12.

14. Sea w una raíz quinceava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n\in\mathbb{N}$ tales que

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}w^{5i}=0$.

ii) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n-1}w^{3i}=0$.

15. Dado un número primo p, probar que:

i) la suma de las raíces p-ésimas primitivas de la unidad es -1.

ii) la suma de las raíces p^2-ésimas primitivas de la unidad es 0.

iii) Si q es un número primo distinto de p, entonces la suma de las raíces pq-ésimas primitivas de la unidad es 1.

iv) ¿Cuánto da la suma de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad si n es un producto de primos distintos?

16. Sea $m \in \mathbb{Z}$ un entero par y $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva $2m$-ésima de la unidad. Probar que $(\omega - 1)^m$ es imaginario puro.

17. Sea $\omega_{23} \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva de la unidad de orden 23. Hallar la parte real de $\displaystyle\sum_{k=1}^{11} \omega_{23}^{k^2}$.

18. Probar que si $w \in G_7$ entonces $\mathrm{Re}((w^{31} + 1)(w^{18} - 1)) = 0$.

19. Sea w una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que z_n es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$

20. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y solo si $\overline{w}$ lo es.

21. Sea w una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$.

22. Sea $w \in G_{35}$ una raíz 35-ava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{cases} w^{15n} &= w^5 \\ w^{14n} &= w^{21} \end{cases}$$

23. Sea G_{20} el conjunto de raíces 20-avas de la unidad y G_4 el conjunto de raíces cuartas de la unidad. Sea $\sim$ la relación en G_{20} definida por

$$a \sim b \iff a = \omega b, \text{ para algún } \omega \in G_4,$$

o sea dos elementos están relacionados si uno es un múltiplo del otro por una raíz cuarta de la unidad.

i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

ii) ¿Cuántas clases de equivalencia hay en total?

24. Probar que no es posible hallar tres puntos del plano con coordenadas enteras que sean los vértices de un triángulo equilátero.

25. Sobre los lados del cuadrilátero $ABCD$ se dibujan exteriormente los cuadrados BAB_1A_2, CBC_1B_2, DCD_1C_2 y ADA_1D_2 de centros O_{AB}, O_{BC}, O_{CD} y O_{DA} respectivamente. Probar que los segmentos $O_{AB}O_{CD}$ y $O_{BC}O_{DA}$ son perpendiculares y de la misma longitud.

26. i) Sea $\omega \in G_k$ una raíz $k-$ésima primitiva de la unidad. Hallar $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \omega^{in}$ en función de n.

ii) Hallar $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$.

$*$ **27**. Sea $n \geq 1$. Probar que $\displaystyle 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$.

$*$ **28**. Se define $D_0(x) = 1$ y para $n \geq 1$, $D_n(x) = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$.

Polinomios: generalidades.

29. Calcular el grado y el coeficiente principal de $f \in \mathbb{Q}[X]$ en los casos

i) $f = (4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$.
ii) $f = (-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$.
iii) $f = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$.

30. Calcular el coeficiente de X^{20} de f en los casos

i) $f = (X^{18} + X^{16} + 1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ en $\mathbb{Q}[X]$ y en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.
ii) $f = (X - 3\,i)^{133}$ en $\mathbb{C}[X]$.
iii) $f = (X - 1)^4(X + 5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7$ en $\mathbb{Q}[X]$.
iv) $f = X^{10}(X^5 + 4)^7$ en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

31. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que

i) $f^2 = Xf + X + 1$.
ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$.
iii) $(X + 1)f^2 = X^3 + Xf$.
iv) $f \neq 0$ y $f^3 = \mathrm{gr}(f) \cdot X^2 f$.

32. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4,\;\; g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.
ii) $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4,\;\; g = 2X^3 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.
iii) $f = 4X^4 + X^3 - 4,\;\; g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.
iv) $f = X^5 + X^3 + X + 1,\;\; g = 2X^2 + 1$ en $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.
v) $f = X^n - 1,\;\; g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

33. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$.
ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$.
iii) El resto de la división de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

34. *Definición:* Sea K un cuerpo y sea $h \in K[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in K[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g \pmod{h}$.
Probar que

i) $\equiv \pmod{h}$ es una relación de equivalencia en $K[X]$.
ii) Si $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$ y $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$.
iii) Si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
iv) r es el resto de la división de f por h si y sólo si $f \equiv r \pmod{h}$ y $r = 0$ ó $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(h)$.
v) ¿Qué se obtiene al trabajar con los polinomios de $\mathbb{R}[X]$ módulo $X^2 + 1$?

35. Hallar el resto de la división de f por h para

i) $f = X^{353} - X - 1$ y $\quad h = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.
ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1, \quad h = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.
iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2, \quad h = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

36. Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $a \in K$. Probar que en $K[X]$ vale:

i) $X - a \mid X^n - a^n$.

ii) Si n es impar entonces $X + a \mid X^n + a^n$.

iii) Si n par entonces $X + a \mid X^n - a^n$.

Calcular los cocientes en cada caso.

37. Calcular el máximo común divisor entre f y g y escribirlo como combinación lineal de f y g siendo

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, \quad g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$.

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, \quad g = X^3 + X$.

iii) $f = X^5 + X^4 - X^3 + 2X - 3, \quad g = X^4 + 2X + 1$.

38. Sea $X^{(n)} := X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(X-i) \in \mathbb{Z}[X]$.

Para cada polinomio $P(X)$ se definen $\Delta P(X) := P(X+1) - P(X)$.

Probar que

i) $\Delta X^{(n)} = nX^{(n-1)}$.

ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} i^{(n)} = \frac{k^{(n+1)}}{n+1}$.

iii) $\Delta^k P(X) = 0$ para todo $k > \mathrm{gr}(P)$.

iv) $P(X) = \displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{\Delta^k P(0)}{k!} X^{(k)}$.

39. Sean p un primo, m, n naturales tales que $m = ap + r$ y $n = bp + s$ con r, s los restos en la división por p. Probar que

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{a}{b}\binom{r}{s} \pmod{p}.$$

Sugerencia: Expandir $(X+1)^m = ((X+1)^p)^a (X+1)^r$ en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

40. Sea t una raíz cúbica de 2. Dados $a, b, c \in \mathbb{Q}$ números racionales no todos nulos, sea $x = a + bt + ct^2 \in \mathbb{C}$. Demostrar que existen d, e, f racionales tales que $y = d + et + ft^2$ cumple $xy = 1$.

$*$ **41**. Hallar en función de $n \in \mathbb{N}$ el producto de las longitudes de las diagonales de un polígono regular de n lados inscripto en una circunferencia de radio 1.

$*$ **42**. Sea $n \geq 2$. Probar que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

$*$ **43**. *(Números de Stirling de segunda especie)* Sea $S(n, k)$ el número de particiones de un conjunto de n elementos con exactamente k partes.

i) Probar que $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S(n,k) X^{(k)}$ donde los polinomios $X^{(k)}$ son los del ejercicio 38.

Sugerencia: contar funciones $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, x\}$ con $x \in \mathbb{N}$.

ii) Hallar $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 8 tal que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^7 = P(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$*$ **44**. Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(0), P(1), \dots, P(n-1)$ y $P(n)$ son números enteros. Probar que $P(m) \in \mathbb{Z}$ para todo entero m y que $n!P(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

Sugerencia: Ejercicio 38, item (iv).

$\ast$ **45**. *(Polinomios de Tchebychev)* Sea $\{T_n(x)\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios definida recursivamente por $T_0(x)=1,\ T_1(x)=x$ y $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$.

i) Probar que $T_n(\cos(x))=\cos(nx),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

ii) Probar que $T_n(x)=\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{2}$.

iii) Se define la sucesión de polinomios $U_n(x):=\dfrac{1}{n+1}T'_{n+1}(x)$.
Probar que $T_n(x)^2-(x^2-1)U_{n-1}(x)^2=1$.

$\ast$ **46**. i) Hallar, para todo $n\in\mathbb{Z}$, un polinomio $\widetilde{T}_n\in\mathbb{Z}[X]$ mónico tal que $\widetilde{T}_n(2\cos(x))=2\cos(nx),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

ii) Sea $q\in\mathbb{Q}$ tal que $\cos(q\pi)\in\mathbb{Q}$. Probar que $\cos(q\pi)\in\{0,\pm 1,\pm\frac{1}{2}\}$.

Polinomios: evaluación y raíces.

47. Sea $f\in\mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1)=-2$, $f(2)=1$ y $f(-1)=0$. Hallar el resto de la división de f por X^3-2X^2-X+2.

48. Sea $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n}+3X^{n+1}+3X^n-5X^2+2X+1$ por X^3-X.

49. i) Hallar todos los $f\in\mathbb{Q}[X]$ de grado 3 cuyas raíces complejas son exactamente $1,\ -\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{3}{5}$.

ii) Hallar todos los $f\in\mathbb{Z}[X]$ de grado 3 cuyas raíces complejas son exactamente $1,\ -\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$.

iii) Hallar todos los $f\in\mathbb{Q}[X]$ de grado 4 cuyas raíces complejas son exactamente $1,\ -\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{3}{5}$.

50. Sean a, b y c las raíces complejas de $2X^3-3X^2+4X+1$.

i) Hallar

(a) $a+b+c$,

(b) $ab+ac+bc$,

(c) abc,

(d) $a^2+b^2+c^2$,

(e) $a^3+b^3+c^3$,

(f) $a^4+b^4+c^4$,

(g) $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$,

(h) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$,

(i) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

ii) Encontrar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $a+b$, $a+c$ y $b+c$.

51. *Evaluación de polinomios:* Sea $f=a_nx^n+\cdots+a_0\in K[X]$. Queremos calcular la cantidad de sumas y productos necesarios para calcular $f(\alpha)$, $\alpha\in K$, por medio de los siguientes algoritmos:

i) *Algoritmo ingenuo:* Se calculan todos los α^k recursivamente, guardando todos los resultados, luego se multiplica cada uno por su coeficiente a_k y se suma. ¿Cuántas sumas y cuántos productos se utilizaron?

ii) *Método de Horner* (por el matemático inglés William George Horner, 1786-1837, aunque también era conocido por el matemático italiano Paolo Ruffini, 1765-1822, y mucho antes en realidad por el matemático chino Qin Jiushao, 1202-1261). Es el algoritmo que describe el mecanismo siguiente:

$$\begin{aligned} n=2: &\quad f(\alpha)=a_0+\alpha(a_1+\alpha a_2)\\ n=3: &\quad f(\alpha)=a_0+\alpha(a_1+\alpha(a_2+\alpha a_3))\\ n=4: &\quad f(\alpha)=a_0+\alpha(a_1+\alpha(a_2+\alpha(a_3+\alpha a_4)))\end{aligned}$$

Y en general

$$f(\alpha)=a_0+\alpha(a_1+\alpha(a_2+\alpha(a_3+\cdots+\alpha(a_{n-2}+\alpha(a_{n-1}+\alpha a_n))\cdots))).$$

¿Cuántas sumas y cuántos productos se utilizaron?

52. *(Polinomio interpolador de Lagrange)* Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tales que $a_j \neq a_k$ si $j \neq k$. Probar que

$$f = \sum_{k=0}^{n} b_k \left(\prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \neq k}} \frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right)$$

es el único polinomio en $\mathbb{C}[X]$ que es nulo o de grado menor o igual que n y que satisface $f(a_k) = b_k$ para todo $0 \le k \le n$

53. Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que

i) $f(1) = 3$, $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = 3$ y $f(-1) = 1$.

ii) $f(2) = 0$, $f(-3) = \frac{1}{2}$, $f(3) = -1$ y $f(-2) = 1$.

54. i) Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ y sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. Probar que si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$.

ii) Probar que no existe $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $f(3) = 4$ y $f(-2) = 7$.

55. Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 7$ con a, b, c, d enteros distintos.

Probar que $f(m) \neq 14$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

56. Hallar todos los $f \in \mathbb{Z}[X]$ tales que

i) f es mónico de grado 3 y $f(\sqrt{2}) = 5$.

ii) f es mónico de grado 3 y $f(1) = -f(-1)$.

57. Hallar las raíces en $\mathbb{C}$ y factorizar en $\mathbb{C}[X]$ los polinomios cuadráticos

i) $X^2 - 2X + 10 = 0$.

ii) $X^2 = 3 + 4\,i$.

iii) $X^2 + (1 + 2\,i)\,X + 2\,i = 0$.

iv) $X^2 + (3 + 2\,i)\,X + 5 + i = 0$.

58. Hallar las raíces en $\mathbb{Q}$ y factorizar en $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios cuadráticos

i) $X^2 + 6X - 1 = 0$.

ii) $X^2 + X - 6 = 0$.

59. Hallar las raíces en $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ y factorizar en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$ los polinomios cuadráticos

i) $X^2 + 6X + 1 = 0$.

ii) $X^2 + X + 6 = 0$.

60. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $X^6 + X^3 - 2$.

61. Sea $\omega = e^{\frac{2\pi}{7} i}$. Probar que $\omega + \omega^2 + \omega^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$.

62. i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y de g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$.

ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.

63. Hallar todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que $X^3 f' = f^2$.

64. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1.$

ii) $f = 4X^4 + 5X^2 - 7X + 2, \quad a = \frac{1}{2}.$

iii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i.$

iv) $f = (X-2)^2(X^2-4)-(X-2)(X+7), \quad a = 2.$

v) $f = (X-2)^2(X^2-4)+(X-2)^3(X-1), \quad a = 2.$

vi) $f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3, \quad a = 2.$

65. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene sólo raíces simples en $\mathbb{C}$.

66. Determinar los $a \in \mathbb{R}$ tales que $f = X^{2n+1} - (2n+1)X + a$ tiene al menos una raíz múltiple en $\mathbb{C}$.

67. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en $\mathbb{C}$. Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.

68. i) Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^2$.

ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X-1)^3$.

69. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 1 sea raíz *doble* de $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$.

70. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k \in \mathbb{C}[X]$ tiene todas sus raíces complejas simples.

71. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$ tiene todas sus raíces complejas simples.

72. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X-i)(f_n + f_n'), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que i es raíz *doble* de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

73. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^3 + 2X - 1 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = Xf_n^2 + X^2 f_n', \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $\mathrm{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

74. i) Sea $f \in \mathbb{C}[X]$. Probar que $a \in \mathbb{C}$ es raíz de multiplicidad k de f si y sólo si es raíz de multiplicidad $k-1$ de $(f : f')$.

ii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$. Probar que si f es irreducible, entonces tiene todas sus raíces (en $\mathbb{C}$) simples.

$*$ **75**. Sea $P(x)$ un polinomio de grado a lo sumo n tal que $P(i) = \dfrac{1}{i+1}$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Hallar $P(n+1)$.

$*$ **76**. Sea $P(x)$ un polinomio de grado a lo sumo n tal que $P(i) = 2^i$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Hallar $P(n+1)$.

$*$ **77**. Sea $P(x)$ un polinomio de grado a lo sumo n tal que $P(i)$ es el $i-$ésimo número de Fibonacci para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Hallar $P(n+1)$.

$*$ **78**. Dados $2n$ números $a_1, ..., a_n$ y $b_1, ..., b_n$ formamos una matriz de $n \times n$ de la siguiente manera: en la posición (i, j) escribimos el número $a_i + b_j$. Supongamos que el producto de los números en cada columna es el mismo. Probar que lo mismo ocurre con los productos de los números de las filas.

$*$ **79**. *(Desigualdades de Cauchy)* Sea $f = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio con coeficientes complejos. Sea $M > 0$ tal que $|f(z)| \le M$ siempre que $|z| \le 1$.

i) Probar que $|a_k| \le M$ para todo $k = 0, 1, \dots, n$. Sugerencia: Ejercicio 26.

ii) Si $|f(z)| \le M$ para todo z en el círculo de centro a y radio R, probar que $|f^k(a)| \le \dfrac{k!M}{R^k}$.

Polinomios: factorización.

80. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ los polinomios

i) $X^6 - 8$.

ii) $X^4 + 3$.

iii) $X^7 - (-1 + i)$.

iv) $X^{11} - 2\,i\,(\sqrt{2} - \sqrt{6}\,i)^{-1}$.

v) $X^6 - (2 - 2i)^{12}$.

vi) $X^{12} + X^6 + 1$.

81. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios

i) $X^3 - 1$.

ii) $X^4 - 1$.

iii) $X^6 - 1$.

iv) $X^8 - 1$.

82. Factorizar en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios

i) $X^6 - 8$.

ii) $X^4 + 3$.

iii) $X^{12} + X^6 + 1$.

83. Factorizar los polinomios

i) $X^4 - 1$ en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$

ii) $X^4 + 3$ en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$

iii) $X^4 - 1$ en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$

iv) $X^4 + X^3 + X^2$ en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$.

84. i) Probar que $(X^n - 1 : X^m - 1) = X^{(n:m)} - 1$.

ii) Hallar $(X^{a^n - 1} - 1 : X^{a^m - 1} - 1)$ para $a \ge 2$ entero.

85. i) Hallar todas las raíces racionales de

(a) $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$.

(b) $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$.

(c) $3X^4 + 8X^3 + 6X^2 + 3X - 2$.

(d) $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$.

86. Factorizar los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

i) $X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$.

ii) $X^4 - 6X^2 + 1$.

iii) $X^5 - X^3 + 17X^2 - 16X + 15$ sabiendo que $1 + 2\,i$ es raíz.

iv) $X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 - 1$ sabiendo que $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ es raíz.

v) $f = X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$ sabiendo que $\sqrt{2}\,i$ es raíz múltiple de f.

vi) $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$ sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.

vii) $X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 13X^2 - 15X + 10$ sabiendo que una de sus raíces es una raíz sexta primitiva de la unidad.

87. Hallar todas las raíces complejas del polinomio $X^6 - X^5 - 7X^4 - 7X^3 - 7X^2 - 8X - 6$ sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 2 y cuyo producto es -6.

88. i) Hallar todas las raíces complejas de $f = X^5 - 4X^4 - X^3 + 9X^2 - 6X + 1$ sabiendo que $2 - \sqrt{3}$ es raíz de f.

ii) Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónico de grado mínimo que tenga a $1 + 2\sqrt{5}$ y a $3 - \sqrt{2}$ como raíces.

iii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado 5. Probar que si $\sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{3}$ son raíces de f entonces f tiene una raíz racional.

iv) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1 + \sqrt{2}) = 3$, $f(2 - \sqrt{3}) = 3$ y $f(1 + \sqrt{5}) = 3$. Calcular el resto de la división de f por $(X^2 - 2X - 1)(X^2 - 4X + 1)(X^2 - 2X - 4)$.

89. Factorizar el polinomio $X^4 + X^3 - 3X^2 + 4X - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que la suma de tres de sus raíces es $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$.

90. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = X^4 - (a+4)X^3 + (4a+5)X^2 - (5a+2)X + 2a$ tenga a a como raíz *doble*. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

91. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 2 es una raíz múltiple del polinomio

$$f = aX^5 + 8X^4 - 26X^3 + 44X^2 - 40X - (32a + 16).$$

Para cada valor de a hallado factorizar el polinomio en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$.

92. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales al menos una de las raíces de

$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

sea una raíz sexta primitiva de la unidad.

Para cada valor de $a \in \mathbb{Q}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

93. Sea $z \in \mathbb{C}$ y sea $f_z = X^3 - 2zX^2 - z^2X + 2z \in \mathbb{C}[X]$.

i) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ las tres raíces de f_z. Probar que $\alpha\beta\gamma = -2z$.

ii) Determinar los valores de $z \in \mathbb{C}$ para los cuales f_z tiene dos raíces cuyo producto es igual a 2. Para cada valor hallado factorizar f_z en $\mathbb{C}[X]$.

94. i) ¿Cuántos polinomios mónicos de grado 2 hay en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$? ¿Cuántos de ellos son reducibles y cuántos irreducibles?

ii) Sea p un número primo. ¿Cuántos polinomios mónicos de grado 2 hay en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$? ¿Cuántos de ellos son reducibles y cuántos irreducibles?

95. *(Lema de Gauss)* Sea p un número primo y $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio. Supongamos que todos los coeficientes de f son múltiplos de p y que $f(X) = f_1(X)f_2(X)$ con $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}[X]$. Probar que alguno de los factores f_1, f_2 tiene todos los coefficientes múltiplos de p.

Sugerencia: Considerar $\overline{f}, \overline{f_1}, \overline{f_2} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

96. Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ de grado 7 tal que toma alguno de los valores 1 o -1 para 7 valores enteros diferentes de X. Probar que f es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

97. Encontrar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(X - a)(X - 10) + 1$ sea reducible en $\mathbb{Z}[X]$.

98. Encontrar $a, b, c \in \mathbb{Z} - \{0\}$ distintos tales que $X(X - a)(X - b)(X - c) + 1$ sea reducible en $\mathbb{Z}[X]$.

$*$ **99**. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros distintos.

i) Probar que $(X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_n) - 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

ii) Probar que $(X - a_1)^2(X - a_2)^2\ldots(X - a_n)^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

$*$ **100**. i) Probar que $X^2 + X + 1$ es irreducible en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.

ii) Probar que $(X^2 + X)^{2^n} + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.