Ejercicio para entregar 2

1. Considerar la función $f(x)$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna (cuando existe) el valor de la suma
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \ .$$
Describir el dominio de esta función y verificar que en ese dominio vale
$$f(x) = \frac{1}{1+x} \ .$$
Notar que existe el $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$ pero la serie no converge en $x = 1$.

2. Describir el dominio la función $g(x)$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna (cuando existe) el valor de la suma
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
y verificar que en este dominio, $g(x) = \log(1+x)$. ¿Qué sucede ahora cuando $x \to 1^-$?

Sugerencia: Notar que es posible obtener una expresión explícita de las sumas parciales
$$g_k(x) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
de esta serie como una integral, integrando la correspondiente expresión para la serie geométrica. Utilizarla para acotar el error de aproximar $\log(1+x)$ por $g_k(x)$.