PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

Práctica 6 - Markov.

1. El ascensor de un edificio con planta baja y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. Definimos

   X_n = piso en el que el ascensor finaliza el viaje n-ésimo.

   Supondremos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten de la planta baja se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25 % de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en la planta baja.

   a) Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

   b) Dibujar el grafo asociado.

   c) Si en este momento el ascensor se encuentra en el piso 1, calcular la probabilidad de que luego de tres viajes termine en pb.

   d) Si luego de cada reparación técnica el ascensor tiene las mismas chances de arrancar en cada piso, calcular la probabilidad de que en su segundo viaje (luego de una reparación técnica) termine en el piso 2.

   e) ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos?

2. El precio de una acción se mueve día a día dentro de los valores $\{1, 2, 3, 4\}$ (expresado en alguna unidad monetaria). Sea X_n = precio de la acción el día n. Supondremos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una cadena de Markov verificando: Si $X_n = j$ con $j = 2$ o 3, luego $X_{n+1} = j - 1$ con probabilidad 0,2 y $X_{n+1} = j + 1$ con probabilidad 0,8. Si $X_n = 1$ entonces $X_{n+1} = 2$ con probabilidad 1. Finalmente, si $X_n = 4$ entonces $X_{n+1} = 3$ con probabilidad 1.

   a) Escribir la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

   b) Dibujar el grafo asociado.

   c) Si hoy la acción tomó el valor 3, cuál es la probabilidad de que quede en baja mañana.

   d) Si hoy la acción tomó el valor 3, cuál es la probabilidad de que quede en baja pasado mañana.

   e) Calcular el precio esperado de la acción en el largo plazo.

3. Tenemos tres bolas blancas y tres bolas negras distribuidas al azar en dos urnas de forma tal que cada urna contiene tres bolas. En cada paso saco una bola de cada urna y las cambio de urna. Sea $X_n =$ Cantidad de bolas blancas que hay en la urna 1 en el paso n. Es fácil convencerse de que X_n conforma una cadena de Markov.

   a) Dibujar el grafo asociado a esta cadena.

   b) Encontrar la matriz de transición asociada a este problema.

   c) Sabiendo que $X_0 = 2$, calcule la distribución de X_2.

   d) Obtener la distribución a largo plazo de X_n.