

## ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano 2015

### Práctica 7 - Matrices estocásticas y procesos de Markov

1. Determinar cuáles de las siguientes matrices son estocásticas o de Markov.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0.5 \\ -\frac{1}{2} & 0.5 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0.5 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

2. Se tiene un proceso de Markov cuya matriz de transición es  $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$ .

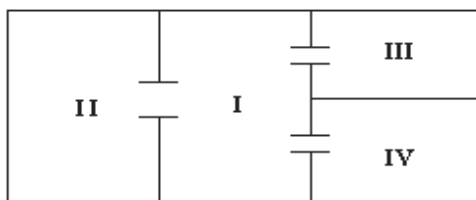
Verificar que el vector  $V = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$  es un estado de equilibrio del proceso.

3. Sea  $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$  la matriz de transición de un proceso de Markov y sea  $V(2) = (\frac{7}{18}, \frac{11}{18})$  el segundo estado. Verificar que  $M$  es inversible y calcular  $V(0)$  y  $V(1)$ .

4. La población en estudio está distribuida en un territorio dividido en dos sectores. Esta población es constante y se desplaza. En el momento inicial, exactamente la mitad de la población está en cada sector. Al día siguiente se observa que el 75% de la población del Sector 1 se ha desplazado al Sector 2, mientras que 1 de cada 10 especímenes que estaban en el Sector 2 pasó al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene.

- (a) Determinar la matriz y el estado inicial que rigen el proceso.  
 (b) Calcular los 5 primeros estados del proceso de Markov.  
 (c) Verificar que el vector  $V = (\frac{2}{17}, \frac{15}{17})$  es estado de equilibrio.

5. En el instante inicial 21 ratones se encuentran en la casilla I (ver diagrama). Se supone que nada distingue un compartimento de otro, es decir que es igualmente probable que un ratón pase a cualquiera de las casillas adyacentes o se quede en la casilla en la que está. Se realizan observaciones cada hora y se registra el nuevo estado.



- (a) Determinar la matriz de transición del proceso.  
 (b) Determinar el vector de estado después de 4 horas.  
 (c) Decidir si existe o no un estado de equilibrio.

6. Sea  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,

$$M = \begin{pmatrix} a & a + \frac{1}{10} & b + \frac{1}{10} \\ b & a & 2a \\ b & b + \frac{1}{10} & \frac{1}{2}a \end{pmatrix}$$

- (a) Determinar todos los  $a, b \in \mathbb{R}$  para los cuales  $M$  resulta ser una matriz de Markov.
  - (b) Para los valores de  $a$  y  $b$  hallados, decidir si hay dos vectores de equilibrio de  $M$  que sean linealmente independientes. En caso afirmativo, hallarlos.
  - (c) Para los valores  $a$  y  $b$  hallados, verificar que  $M^t$  es también una matriz de Markov. ¿Es casualidad o una ley general?
7. Un país, cuya población es constante está dividido en dos regiones. Cada año 1 de cada 10 residentes de la región  $A$  se traslada a la región  $B$  mientras que 1 de cada 5 habitantes de la zona  $B$  se muda a la región  $A$ . En el instante inicial (ahora) viven 6 millones en la región  $A$  y 30 millones en la  $B$ .
- (a) Escribir la matriz de transición para este proceso.
  - (b) Determinar si existe un estado de equilibrio.
  - (c) Calcular el estado de la población dentro de 10 años y dentro de 30 años.
8. Un proceso de Markov admite 3 estadios o sectores:  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ . La probabilidad de pasar del estadio  $\alpha$  a cada uno de los otros sectores es  $\frac{1}{2}$ . Un individuo que está en el estadio  $\beta$  tiene probabilidad  $\frac{1}{3}$  de pasar al  $\alpha$  y lo mismo sucede para transitar del  $\beta$  al  $\gamma$ . Los individuos en el estadio  $\gamma$  tienen probabilidad 1 de pasar al  $\alpha$  en el período siguiente.
- (a) Armar la matriz de transición  $M$  de este proceso.
  - (b) Si el estado actual está dado por  $V = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ , determinar el estado siguiente.
  - (c) Analizar el comportamiento de  $M^n$  para valores de  $n$  grandes.
  - (d) Decidir si existe un estado límite.
9. Sea  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  una matriz que define un proceso de Markov de la que se sabe que:
- $m_{12} = m_{13} = 0$  y  $m_{22} + m_{23} = \frac{9}{10}$ ,
  - $\text{tr}(M) = \frac{5}{2}$  y
  - $\det(M) = \frac{1}{2}$ .
- (a) Hallar todos los autovalores de  $M$ .
  - (b) Sabiendo que el vector  $(1, 2, 3)$  resulta estado límite del proceso para cierto vector de estado inicial, hallar la matriz  $M$ .
  - (c) Decidir si hay dos vectores linealmente independientes que sean estados de equilibrio.
  - (d) Determinar si existe  $M_\infty$ .
10. La población en estudio es constante y está distribuida en un territorio dividido en tres sectores. Día a día se observan los desplazamientos: el 100% de la población del Sector 1 se desplaza al Sector 2, el 100% de la población del Sector 2 se ha desplaza al Sector 1, mientras que la población del Sector 3 permanece (sin desplazarse) en su sector. Esta pauta de desplazamiento se mantiene en el tiempo.
- (a) Determinar la matriz de transición  $M$  que describe el proceso.

- (b) Decidir si hay dos estados de equilibrio que sean linealmente independientes.
  - (c) Determinar si el proceso tiene un estado límite, y en caso afirmativo hallarlo, con una población inicial de:
    - i. 200 habitantes en el Sector 1, 200 en el Sector 2 y 300 en el Sector 3.
    - ii. 100 habitantes en el Sector 1, 200 en el Sector 2 y 300 en el Sector 3.
  - (d) Determinar si existe  $M_\infty$ . Justificar.
11. La población en estudio es constante y está distribuida en un territorio dividido en cuatro sectores. Día a día se observan los desplazamientos: el 100% de la población del Sector 1 se desplaza al Sector 2, el 100% de la población del Sector 2 se ha desplaza al Sector 3, el 100% de la población del Sector 3 se ha desplaza al Sector 4 y el 100% de la población del Sector 4 se ha desplaza al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene en el tiempo.
- (a) Determinar la matriz de transición  $M$  que describe el proceso.
  - (b) Decidir si hay dos estados de equilibrio que sean linealmente independientes.
  - (c) Determinar si el proceso tiene un estado límite, y en caso afirmativo hallarlo, con una población inicial de:
    - i. 100 habitantes en cada Sector.
    - ii. 100 habitantes en el Sector 1, 300 en el Sector 2, 100 en el Sector 3 y 300 en el Sector 4.
  - (d) Decidir si existe  $M_\infty$  (Sugerencia: calcular  $M^4$ ).