ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano 2015

Práctica 3 - Geometría lineal

1. Dados los vectores $\vec{v} = (1, -2, 2)$, $\vec{w} = (2, 0, 3)$ y $\vec{z} = (4, 4, 4)$ realizar las operaciones:
   (a) $\vec{v} \cdot \vec{w}$; $\quad \vec{w} \cdot \vec{v}$.
   (b) $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{z}$; $\quad (\vec{v} \cdot \vec{z}) + (\vec{w} \cdot \vec{z})$.
   (c) $(3\vec{v}) \cdot \vec{w}$; $\quad 3(\vec{v} \cdot \vec{w})$.
   (d) $\vec{v} \cdot \vec{v}$; $\quad \vec{w} \cdot \vec{w}$. Comparar con $\|\vec{v}\|$ y $\|\vec{w}\|$.

2. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales (perpendiculares) o no:
   (a) $\vec{v} = (1, 1)$; $\quad \vec{w} = (-2, 2)$.
   (b) $\vec{v} = (2, -3)$; $\quad \vec{w} = (0, 0)$.
   (c) $\vec{v} = (1, 1, 1)$; $\quad \vec{w} = (1, 0, 1)$.
   (d) $\vec{v} = (1, -2, 4)$; $\quad \vec{w} = (-2, 1, 1)$.

3. Hallar:
   (a) Tres vectores en el plano, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (2, 3)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar.
   (b) Todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $\vec{v} = (2, -2)$ y tienen norma 1.
   (c) Tres vectores de $\mathbb{R}^3$, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (1, 3, -4)$.
   (d) Un vector de $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ y de norma 2. ¿Es único?
   (e) Dos vectores ortogonales a $\vec{v} = (3, 2, 7)$ que no sean colineales (es decir, que no sean uno múltiplo del otro).

4. Hallar el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:
   (a) $\vec{v} = (1, 0)$; $\quad \vec{w} = (0, 1)$.
   (b) $\vec{v} = (1, 1)$; $\quad \vec{w} = (0, 1)$.
   (c) $\vec{v} = (1, 2)$; $\quad \vec{w} = (-2, 1)$.
   (d) $\vec{v} = (1, -1, 0)$; $\quad \vec{w} = (0, 1, 1)$.

5. Dados $\vec{u} = (3, 2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$ determinar:
   (a) el ángulo entre ambos vectores.
   (b) la norma de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

6. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ dos vectores que satisfacen $\|\vec{u}\| = 1$ y $\|\vec{v}\| = 3$. ¿Es posible que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$? Justificar.

7. Calcular el producto vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ para los siguientes pares de vectores:
   (a) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\quad \vec{v} = (1, -2, -4)$.
   (b) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\quad \vec{v} = (2, 1, -3)$.
   (c) $\vec{u} = (2, 1, -3)$; $\quad \vec{v} = (1, -2, -4)$.
   (d) $\vec{u} = (2, 0, 0)$; $\quad \vec{v} = (0, 0, 3)$.

   En cada caso, verificar que $\vec{w}$ es ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

8. Sean $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 5, 2)$, $\vec{w} = (1, 2, 4)$ y $\vec{z} = (2, -4, 8)$. Hallar en $\mathbb{R}^3$:
   (a) un vector no nulo que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Es único?
   (b) todos los vectores que son, simultáneamente, ortogonales a $\vec{w}$ y $\vec{z}$.
   (c) un vector de norma 2 que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{w}$ y $\vec{z}$. ¿Es único?

9. En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta L:

   (a) $L : t(-2,3) + (2,2)$
   $P_1 = (2,2),\ P_2 = (-2,3),\ P_3 = (0,0),\ P_4 = (12,-13),\ P_5 = (2,-1)$.

   (b) $L : t(-1,1) + (3,-3)$
   $P_1 = (3,-3),\ P_2 = (0,0),\ P_3 = (-1,1),\ P_4 = (3,4),\ \ P_5 = (\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

10. Graficar y dar una ecuación paramétrica (o vectorial) para la recta que:

   (a) pasa por $P = (-1,2)$ con vector director $\vec{v} = (3,1)$.

   (b) pasa por $P = (1,-4)$ y $Q = (-1,-3)$.

   (c) es paralela a la recta $L :\ t(-2,3) + (1,-1)$ y pasa por $P = (1,-4)$.

   (d) es perpendicular a la recta $L :\ t(2,3) + (5,7)$ y pasa por el origen.

11. (a) Dar una ecuación paramétrica para cada una de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$:

   (a) $y = -2x + 1$. (c) $y = -2$.
   (b) $2x - 3y = 5$. (d) $x = 3$.

   (b) Dar una ecuación implícita para cada una de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$:

   (a) $L : t(3,2) + (1,1)$. (b) $L : t(2,0) + (-1,3)$. (c) $L : t(0,-1) + (2,1)$.

12. En cada uno de los siguientes casos, dar una ecuación paramétrica para la recta que:

   (a) está dirigida por $\vec{v} = (0,1,0)$ y pasa por $P = (0,2,4)$.

   (b) pasa por los puntos $P = (-2,3,4)$ y $Q = (-1,3,1)$.

   (c) es paralela al eje z y pasa por $P = (1,2,3)$.

   (d) es perpendicular a la recta $L :\ t(1,-2,1) + (3,5,7)$ y pasa por $P = (1,9,-3)$. ¿Es única?

13. Dar una ecuación paramétrica del plano dirigido por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ que pasa por el punto P en los siguientes casos:

   (a) $\vec{v} = (0,1,0)$, $\vec{w} = (1,0,0)$, $P = (0,0,1)$.

   (b) $\vec{v} = (0,2,0)$, $\vec{w} = (1,1,0)$, $P = (-1,2,1)$.

   Graficar los planos y compararlos.

14. (a) Dar una ecuación implícita para el plano $\Pi : t(1,1,0) + s(0,-1,2) + (-2,0,4)$.

   (b) Dar una ecuación paramétrica para el plano $\Pi : -x + 3y + 2z = 1$.

15. Dar una ecuación paramétrica y una ecuación implícita para el plano que:

   (a) pasa por los puntos $(2,1,2)$, $(1,1,1)$ y $(3,2,7)$.

   (b) pasa por el punto $(1,2,1)$ y es paralelo al plano que contiene a los ejes x e y.

   (c) es paralelo a la recta $L :\ t(1,2,-4) + (1,2,1)$ y contiene a los puntos $P = (2,2,1)$ y $Q = (1,2,-3)$.

   (d) contiene al punto $(-1,2,2)$ y es ortogonal a la recta $L :\ t(1,1,-1) + (-1,2,2)$.

16. (a) Decidir si los puntos $A = (1,1,1)$, $B = (-2,0,1)$ y $C = (3,0,2)$ son colineales (están sobre una misma recta) o no.

   (b) Decidir si los puntos $A = (8,2,4)$, $B = (4,2,8)$, $C = (-2,0,1)$ y $D = (1,-1,3)$ son coplanares (están sobre un mismo plano) o no.

17. Dado el plano $\Pi:\ 2x-5y+3z=11$:

  (a) Hallar **todos** los valores de $a\in\mathbb{R}$ para los cuales $(2a,a,7)\in\Pi$.
  (b) Decidir si existe algún valor de $a\in\mathbb{R}$ tal que $(1,3a,5a)\in\Pi$.

18. Sean $\Pi: 2x-y+3z=5$, $L: t(1,-1,-1)+(1,0,-2)$ y $L': t(3,5,1)+(0,1,2)$. Calcular $L\cap\Pi$ y $L'\cap\Pi$.

19. Determinar si las rectas L y L' resultan concurrentes, paralelas/coincidentes o alabeadas:

  (a) $L:\ t(1,0,-1)+(-1,1,2)$, $\quad L':\ t(-1,1,2)+(1,0,-1)$.
  (b) $L:\ t(1,1,-1)+(-1,2,2)$, $\quad L':\ t(2,2,-2)+(1,0,-1)$.
  (c) $L:\ t(1,\frac{1}{2},-1)+(-1,1,2)$, $\quad L':\ t(-2,-1,2)+(3,3,-2)$.
  (d) $L:\ t(1,2,-1)+(-1,-1,2)$, $\quad L':\ t(-1,1,1)+(3,2,-1)$.

  En cada caso determinar si existe un plano que contenga a L y L'. Si la respuesta es afirmativa, hallarlo.

20. Determinar en qué casos los planos Π_1 y Π_2 se intersecan y hallar la intersección.

  (a) $\Pi_1:\ 4x+2y-3z=1$; $\quad \Pi_2:\ 2x+y-\frac{3}{2}z=1$.
  (b) $\Pi_1:\ 3x-2y-1=0$; $\quad \Pi_2$ el plano dirigido por $(0,0,1)$, $(2,3,3)$ que pasa por $(1,1,2)$.
  (c) Π_1 el plano que pasa por $(-1,1,2)$ con vector normal $(1,2,-1)$;
  Π_2 el plano que pasa por $(1,1,1)$, $(2,3,1)$ y $(-1,-2,2)$.

21. Hallar ecuaciones implícitas para cada una de las rectas siguientes (es decir, describirlas como intersección de dos planos dados por ecuaciones implícitas):

  (a) L que es intersección del plano xy con el plano yz.
  (b) $L:\ t(1,0,-1)+(-1,1,2)$.
  (c) L que pasa por los puntos $(-5,3,7)$ y $(2,-3,3)$.

22. En cada uno de los siguientes casos, hallar la intersección de las rectas L y L':

  (a) $L: t(1,1,0)+(0,-1,2)$, $\quad L': \begin{cases} x-y+z=3 \\ -2x+y+z=-2 \end{cases}$.
  (b) $L: t(1,1,0)+(0,-1,2)$, $\quad L': \begin{cases} x-y+z=3 \\ -2x+2y+z=2 \end{cases}$.

23. Sean los planos $\Pi_1: \lambda(1,0,1)+\mu(0,1,0)$ y $\Pi_2: 2x-k^2y-z=k$.
  Hallar todos los $k\in\mathbb{R}$ tales que $\Pi_1\cap\Pi_2=L$ con $L:=t(1,1,1)+(2,1,2)$.

24. Sean las rectas de $\mathbb{R}^2$, $L_1: x-y=1$ y $L_2: x+y=3$.

  (a) Calcular el ángulo entre L_1 y L_2.
  (b) Hallar una recta L_3 tal que $\angle(L_1,L_3)=\angle(L_2,L_3)$ y $L_1\cap L_2\in L_3$.

25. Sean $L_1: t(1,-2,1)+(0,0,-2)$ y L_2 la recta que pasa por $(1,4,2)$ y $(0,2,-1)$.

  (a) Verificar que $L_1\cap L_2\neq\emptyset$.
  (b) Hallar un plano que contenga a L_1 y L_2 y determinar el ángulo entre L_1 y L_2.

26. Sea L_1 la recta que tiene dirección $(1,2,-1)$ y pasa por $(-1,3,1)$, y sea L_2 la recta que pasa por $(-1,1,3)$ y por $(1,2,7)$.

(a) Verificar que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

(b) Determinar una recta L_3 paralela a L_1 que interseque a L_2 en el punto $(-1, 1, 3)$ y hallar el ángulo entre L_3 y L_2.

27. Encontrar **todos** los puntos de la recta $L: \ t(1, -1, 0) + (2, 1, -1)$ que están a distancia 6 del punto $P = (2, 1, -1)$.

28. Calcular la distancia entre:

(a) la recta $L: \ t(1, 1) + (3, 0)$ y el punto $P = (-1, 1)$.

(b) la recta $L: \ t(1, 1, 0) + (3, 0, 0)$ y el punto $P = (-1, 1, 0)$.

(c) el plano Π que pasa por $(1, 2, 1)$ y tiene vector normal $(1, -1, 2)$ y el punto $P = (1, 2, 5)$.

29. Sean $L : t(2, -2, -3) + (0, 2, 2)$ y $P = (0, -2, -1)$.

(a) Hallar el plano Π perpendicular a L que pasa por P y determinar $Q = L \cap \Pi$.

(b) Calcular $d(P, Q)$. ¿Qué significa en este problema el número $d(P, Q)$?

30. Se consideran las rectas $L_1 : \begin{cases} 2x - y - z &= 4 \\ 4x - y - 2z &= 9 \end{cases}$ y $L_2 : \ t(1, 0, 2) + (1, 2, -3)$.

(a) Probar que L_1 y L_2 son paralelas.

(b) Hallar un plano Π perpendicular a L_2 que pase por $P = (1, 2, -3)$ y determinar $Q = L_1 \cap \Pi$.

(c) Calcular $d(P, Q)$. ¿Qué significa el número $d(P, Q)$ en este problema?

31. Sean Π el plano de ecuación $x + y + z = 1$ y L la recta $L : t(-1, 0, 1) + (1, 1, 2)$.

(a) Probar que L es paralela a Π.

(b) Hallar una recta L' ortogonal a Π que pase por $P = (1, 1, 2)$ y determinar $Q = L' \cap \Pi$.

(c) Calcular $d(P, Q)$. ¿Qué significa el número $d(P, Q)$ en este problema?

32. Sean las rectas $L_1 : t(1, 1, 0) + (2, 2, 1)$ y $L_2 : t(1, 0, -2) + (1, -1, 0)$.

(a) Hallar, si es posible, dos planos paralelos Π_1 y Π_2 tales que $L_1 \subset \Pi_1$ y $L_2 \subset \Pi_2$.

(b) Hallar un plano Π_3 tal que $d(P, \Pi_1) = d(P, \Pi_2)$ para todo $P \in \Pi_3$.

33. Sean en $\mathbb{R}^3$ la recta $L : t(1, 2, 3) + (0, 1, 3)$ y el plano $\Pi : k^2 x + y - kz = -2$.

(a) Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que $L \cap \Pi = \emptyset$.

(b) Para cada k obtenido, calcular la distancia entre L y Π.