ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano 2015

Práctica 2 - Sistemas lineales

1. Se considera el sistema lineal

$$S: \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z + w &=& 2 \\ 3x + y + z + w &=& 6 \\ 5x - 3y - 3z + w &=& 0 \end{array} \right.$$

y los vectores $\vec{v}_1 = (0,0,0,0)$, $\vec{v}_2 = (1,1,1,1)$, $\vec{v}_3 = (-2,2,-3,7)$, $\vec{v}_4 = (0,2,2,2)$. Decidir:

   a) cuáles de las cuaternas dadas son soluciones de S.

   b) cuáles de las cuaternas dadas son soluciones del sistema homogéneo asociado a S.

2. Considerar el sistema lineal

$$S: \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 &=& 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &=& 6 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 &=& 0 \end{array} \right. .$$

Reescribir el sistema como producto de matrices (notación matricial). Hacer lo mismo para el sistema homogéneo asociado.

3. Escribir el sistema lineal correspondiente al producto $A \cdot \vec{x} = b$ en cada uno de los siguientes casos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

4. Hallar, si es que existen, todos los valores de a, $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $(1,-2,3)$ es solución del sistema lineal dado en cada uno de los siguientes casos:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rcl} 2b\,x + y - z &=& 1 \\ x - a\,y + z &=& 0 \\ 4x - b\,y + a\,z &=& 4 \end{array} \right. . \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2a\,y + z &=& 0 \\ a\,y - b\,z &=& 4 \\ x + b\,y + (2a+b)z &=& b \end{array} \right. .$$

5. Determinar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) cuáles de las siguientes operaciones sobre las ecuaciones de un sistema lineal generan otro sistema equivalente al original.

   a) Sustituir dos ecuaciones por su suma.

   b) Multiplicar una ecuación por un número real no nulo.

   c) Sumar 2 al primer miembro de cada ecuación del sistema.

   d) Intercambiar dos ecuaciones entre sí.

   e) Sustituir una ecuación por el resultado de sumarla con otra.

   f) Sustituir una ecuación por el resultado de restarle otra.

6. Clasificar cada uno de los siguientes sistemas lineales. Cuando el sistema sea compatible determinado, obtener la solución. Cuando el sistema sea compatible indeterminado, describir el conjunto de todas las soluciones. Si es incompatible, no hacer nada. En cada caso, describir además el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado.

(a) $\begin{cases} 3x+5y &= 2 \\ -2x+4y &= 6 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x-2y &= 0 \\ 2x+y &= 0 \\ x+3y &= 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x-2y &= 2 \\ 2x+y &= 1 \\ x+3y &= -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x+2y+z &= 3 \\ x-2y+z &= 3 \\ 2x+y-z &= 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x+y-z &= 8 \\ x-y+z &= 1 \\ 5x+y-z &= 17 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x+y-z &= 3 \\ x-y+z &= 2 \\ 5x+y-z &= -5 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 3y-2z+3w &= 9 \\ 2x+y+w &= 5 \\ x-y+z-w &= -2 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x+2y-z+2t &= 0 \\ x+y+z+2t &= 1 \\ -x+y-5z-2t &= -3 \end{cases}$

7. Construir:

   a) Dos sistemas lineales distintos de tres ecuaciones con tres incógnitas de manera tal que $(-1, 2, -5)$ sea la única solución de cada sistema.

   b) Un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas de manera tal que tenga infinitas soluciones y $(-1, 2, -5)$ sea una de ellas.

8. Agregar una ecuación al sistema lineal $S : \begin{cases} 3x-y+z &= 1 \\ 4x+2y-2z &= 0 \end{cases}$ de manera que resulte:

   a) compatible determinado.

   b) compatible indeterminado.

   c) incompatible.

9. Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   a) Todo sistema lineal **homogéneo** tiene, al menos, una solución.

   b) Los sistemas lineales homogéneos tienen, siempre, infinitas soluciones.

   c) Si indicamos con n la cantidad de incógnitas de un sistema lineal **homogéneo**, y con m la cantidad de ecuaciones de dicho sistema, entonces:

      - si vale $m < n$, el sistema tiene infinitas soluciones.
      - si vale $m \geq n$, el sistema tiene una única solución.

   d) Si indicamos con n la cantidad de incógnitas de un sistema lineal **no homogéneo**, y con m la cantidad de ecuaciones de dicho sistema, entonces:

      - si vale $m < n$, el sistema tiene infinitas soluciones.
      - si vale $m \geq n$, el sistema tiene una única solución.

   e) Si un sistema lineal tiene más de una solución, entonces tiene infinitas.

   f) Una ecuación de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde al menos uno de los a_i es no nulo, siempre tiene solución.

   g) Si cada ecuación de un sistema lineal tiene solución, entonces todo el sistema es compatible.

   h) Si una ecuación de un sistema lineal no tiene solución, entonces todo el sistema es incompatible.

10. Analizar cada uno de los siguientes sistemas determinando, en cada caso, los valores de k (si existen) que hacen que el sistema resulte compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

(a) $\begin{cases} (k^2-9)x + y + kz &= 0 \\ (k-1)y + z &= 0 \\ (k+2)z &= 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 7x + ky + (4+k)z &= 12 \\ 6x + ky + 3z &= 9 \\ kx + (3-k)z &= 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + z &= k \\ x + ky + z &= 1 \\ kz &= 2 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 2x + 3y - z &= 3 \\ x - y + 3z &= 1 \\ 3x + 7y - 5z &= k^2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ (k+2)x + ky - z &= 0 \\ -x + y - 2z &= -1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x + ky + 2z - w &= k+2 \\ x + ky - 2z &= 2 \\ -4z + k^2 w &= -3k-2 \end{cases}$

11. Determinar todos los valores de a, $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2, 0, -1)$ es la única solución del sistema

$$\begin{cases} 2x - a\,y + 2z &= 2 \\ x + y - b\,z &= 3 \\ y - z &= 1 \end{cases}.$$

12. En el estanque de un establecimiento de cría ictícola hay tres tipos de peces (indicados con I, II y III, respectivamente) que son nutridos con los alimentos A, B y C. El consumo semanal promedio de cada pez (tomado en unidades básicas) está dado por la tabla:

	Alimento A	Alimento B	Alimento C
Pez Tipo I	1	1	2
Pez Tipo II	3	4	6
Pez Tipo III	2	1	5

a) Si al empezar la semana hay 2000 peces de tipo I, 3000 peces de tipo II y 4000 peces de tipo III en el estanque, ¿cuántas unidades de cada alimento hay que poner en el estanque en la semana para que no sobre nada y los peces estén nutridos?

b) Semanalmente se vierten en el estanque 14000 unidades del alimento A, 12000 unidades del B y 31000 unidades del C. Toda la comida es ingerida y los peces están bien alimentados. ¿Cuántos peces de cada tipo hay en el estanque?

13. Determinar si las siguientes matrices son inversibles y si lo son calcular su inversa:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, verificar que si $ad - bc = 0$, entonces A no es inversible. Concluir, gracias al último ejercicio de la Práctica 1, que A es inversible (con inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$) si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

15. En cada uno de los siguientes casos hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ o $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, según corresponda, tales que:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

16. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que satisfacen $A \cdot X + 2X = B^t \cdot X + \frac{1}{2} C$ para

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

17. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que satisfacen $A \cdot X = 2X + B^t$ para

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.