ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano 2015

Práctica 1 - Vectores y Matrices

I. Vectores

1. Dados los vectores $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (-1,3)$ y $\vec{w} = (-1,-2)$ calcular analítica y gráficamente las siguientes operaciones:

   (a) $\vec{u} + \vec{v}$; $\quad \vec{v} + \vec{w}$.

   (b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$; $\quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

   (c) $3\vec{u} + 3\vec{v}$; $\quad 3(\vec{u} + \vec{v})$.

   (d) $\vec{u} - \vec{v}$.

2. Sea $\vec{w} = (1,3) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano:

   (a) $L = \{t \cdot \vec{w} : \ t \in \mathbb{R}\}$.

   (b) $L = \{t \cdot \vec{w} : \ t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.

   (c) $L = \{t \cdot \vec{w} : \ t \in \mathbb{R}, \ 0 \leq t \leq 1\}$.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (0,1,2)$, $\vec{v} = (1,1,0)$ y $\vec{w} = (-1,1,1)$ calcular las operaciones:

   (a) $\vec{u} + \vec{v}$.

   (b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

   (c) $\vec{u} - \vec{v}$.

   (d) $2\vec{u}$.

   (e) $-3\vec{w}$.

   (f) $-\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$.

4. En un bioterio observamos que el día primero de julio había 322 ratas de cepa α, 148 de cepa β y 290 de cepa γ. Durante el mes de julio se produjeron 104 nacimientos de cepa α, 48 de cepa β y 110 de cepa γ. A su vez murieron 220 animales, repartidos ordenadamente en 79 de la primera cepa, 51 de la segunda y 90 de la última cepa. Determinar el vector $\vec{I}$ de población inicial, el vector $\vec{N}_7$ de natalidad durante julio, el vector $\vec{M}_7$ de mortalidad durante el mismo mes y el vector $\vec{F}$ de población final al terminar el mes.

5. En el mismo bioterio, los precios de los animales son \$1,50 por cada rata de cepa α, \$2,50 por cada rata de cepa β y \$4 por cada animal de cepa γ. Un comprador necesita 18 animales de cepa α, 24 de cepa β y 20 de cepa γ. Determinar el vector $\vec{P}$ de precios unitarios del bioterio, el vector $\vec{C}$ de compra del cliente y el valor total de la compra.

6. Calcular analítica y gráficamente el punto medio entre $P = (1,4)$ y $Q = (3,2)$.

7. Dados los puntos $A = (1,7,3)$ y $B = (-1,3,0)$, determinar el punto medio entre A y B.

8. Calcular el módulo (o norma) de los vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ según corresponda, y normalizar en cada caso los vectores.

   (a) $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (-1,-2)$, $\vec{w} = (-3,4)$, $\vec{z} = (\frac{-3}{5}, \frac{4}{5})$.

   (b) $\vec{u} = (0,1,2)$, $\vec{v} = (-1,1,1)$, $\vec{w} = (0,1,2) + (-1,1,1)$.

   (c) $\vec{u} = (2,-1,3)$, $\vec{v} = -2 \cdot (2,-1,3)$, $\vec{w} = 2 \cdot (2,-1,3)$.

9. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos:

   (a) $A = (1,-3)$; $\quad B = (0,0)$.

   (b) $A = (1,-3)$; $\quad B = (4,1)$.

   (c) $C = (1,2,3)$; $\quad D = (4,1,-2)$.

   (d) $C = (4,-2,6)$; $\quad D = (3,-4,4)$.

10. Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ que satisfacen:

    (a) $\vec{v} = (4, k)$ y $\|\vec{v}\| = 5$.

    (b) $\vec{v} = (1, k, 0)$ y $\|\vec{v}\| = 2$.

    (c) $\vec{v} = k \cdot (2, 2, 1)$ y $\|\vec{v}\| = 1$.

    (d) $A = (1, 1, 1)$, $B = (k, -k, 2)$ y $d(A, B) = 2$.

11. Sea $C = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano los siguientes conjuntos:

    (a) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \ \|A\| = 1\}$.

    (b) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \ \|A\| \leq 1\}$.

    (c) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \ \|A - C\| = 1\}$.

    (d) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \ \|A - C\| \leq 1\}$.

II. Matrices

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

    (a) $A + 3B - 3C$.

    (b) $A + 3(B - C)$.

    (c) $A - (B - 2C)$.

    (d) $A - B + 2C$.

2. Calcular en cada caso $A \cdot B$ y si es posible $B \cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos cuando se pudo calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$?

    (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

    (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Se consideran matrices de los siguientes tamaños: $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, $B \in \mathbb{R}^{5\times 7}$, $C \in \mathbb{R}^{7\times 5}$. Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.

    (a) $A \cdot B$.

    (b) $B \cdot A$.

    (c) $B \cdot C$.

    (d) $C \cdot B$.

    (e) $A \cdot B \cdot C$.

    (f) $B \cdot C \cdot A$.

    (g) $A \cdot A$.

    (h) $B \cdot C \cdot B \cdot C$.

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

    (a) A^2.

    (b) B^3.

    (c) $-2A^2 + B^3 A$.

5. Mostrar, dando un contraejemplo, que la propiedad "$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$" no es válida para matrices.

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ analizar si son válidas (para matrices) las fórmulas clásicas de factorización:

    (a) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.

(b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular:

   (a) A^t y B^t.

   (b) $(A \cdot B)^t$ y $B^t \cdot A^t$.

8. Dar ejemplos, si existen, de matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $A \neq 0$ y $A \neq I_2$ (distinta de la matriz nula y de la matriz identidad) que cumplan:

   (a) $A^2 = I_2$.

   (b) $A^2 = 0$.

   (c) $A^2 = A$.

   (d) $A \cdot B = B \cdot A$ para toda matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

9. Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calcular los siguientes productos y analizar el resultado en términos de la matriz A. ¿Qué cambios producen los productos en la matriz A?

   (a) $A \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \cdot A$.

   (b) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$.

   (c) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.

   (d) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.

10. Decidir si las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son inversibles, y si lo son calcular su inversa.

11. (a) Probar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ son inversibles y calcular sus inversas.

    (b) Calcular $(AB)^{-1}$, $A^{-1} \cdot B^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$. Comparar.

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, verificar que si $ad - bc \neq 0$, entonces A es inversible con inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.