

Álgebra I

Práctica 5 - Polinomios

Números complejos

1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\operatorname{Re}(z^{-1})$, $\operatorname{Im}(z^{-1})$, $\operatorname{Re}(-i \cdot z)$ e $\operatorname{Im}(i \cdot z)$.

i) $z = (2 + i)(1 + 3i)$.

v) $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^{179}$.

ii) $z = 5i(1 + i)^4$.

vi) $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{-1}$.

iii) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2(\overline{1 - 3i})$.

vii) $z = \overline{1 - 3i}^{-1}$.

iv) $z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1 - i)^3$.

2. Dados $z = 1 + 3i$ y $w = 4 + 2i$, representar en el plano complejo los siguientes números

i) z .

v) $-z$.

ix) \bar{z} .

xiii) $|2z|$.

ii) w .

vi) $2z$.

x) $\overline{3z + 2w}$.

xiv) $|z + w|$.

iii) $z + w$.

vii) $\frac{1}{2}w$.

xi) \overline{iz} .

xv) $|z - w|$.

iv) $z - w$.

viii) iz .

xii) $|z|$.

xvi) $|\overline{w - z}|$.

3. Calcular las raíces cuadradas de los siguientes números complejos z

i) $z = -36$

ii) $z = i$

iii) $z = -3 - 4i$

iv) $z = -15 + 8i$

4. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos

i) $3 + \sqrt{3}i$.

iii) $(-1 - i)^{-1}$.

v) $(-1 + \sqrt{3}i)^{-5}$.

ii) $(2 + 2i)(\sqrt{3} - i)$.

iv) $(-1 + \sqrt{3}i)^5$.

vi) $\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}$.

5. Graficar en el plano complejo

i) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| \geq 2 \text{ y } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}$.

ii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / \arg(-iz) > \frac{\pi}{4}\}$.

iii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| < 3 \text{ y } \arg(z^4) \leq \pi\}$.

6. i) Determinar la forma binomial de

(a) $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^{17}$.

(b) $(-1 + \sqrt{3}i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

ii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$.

7. Hallar en cada caso las raíces n -ésimas de $z \in \mathbb{C}$:

i) $z = 8$, $n = 6$

iv) $z = 2i(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^{-1}$, $n = 11$

ii) $z = -4$, $n = 3$

v) $z = (2 - 2i)^{12}$, $n = 6$

iii) $z = -1 + i$, $n = 7$

vi) $z = 1$, $n = 8$.

8. Calcular:

- i) $w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.
- ii) $w^{73} + \bar{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.
- iii) $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.
- iv) $w^{14} + w^{-8} + \bar{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$.

9. Determinar las raíces n -ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12 .

10. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad si y solo si \bar{w} lo es.

11. Sea w una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que z_n es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$.

12. Sea w una raíz quinceava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\text{i) } \sum_{i=0}^{n-1} w^{5i} = 0. \qquad \text{ii) } \sum_{i=2}^{n-1} w^{3i} = 0.$$

13. i) Calcular la suma de las raíces n -ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 8, 10, 15$.

ii) Calcular la suma de las raíces p -ésimas primitivas de la unidad para p primo.

14. Sea w una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$.

15. Sea $w \in G_{35}$ una raíz 35-ava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{cases} w^{15n} = w^5 \\ w^{14n} = w^{21} \end{cases}$$

16. Sea G_{20} el conjunto de raíces 20-avas de la unidad y sea \sim la relación en G_{20} definida por

$$a \sim b \iff a = \omega b \quad \text{para algún } \omega \in \mathbb{C} \text{ raíz cuarta de la unidad.}$$

- i) Probar que \sim es una relación de equivalencia.
- ii) ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene?

Polinomios: generalidades.

17. Calcular el grado y el coeficiente principal de $f \in \mathbb{Q}[X]$ en los casos

- i) $f = (4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$.
- ii) $f = (-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$.
- iii) $f = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$.

18. Calcular el coeficiente de X^{20} de f en los casos

- i) $f = (X^{18} + X^{16} + 1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ en $\mathbb{Q}[X]$ y en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.
- ii) $f = (X - 3i)^{133}$ en $\mathbb{C}[X]$.
- iii) $f = (X - 1)^4(X + 5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7$ en $\mathbb{Q}[X]$.
- iv) $f = X^{10}(X^5 + 4)^7$ en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

19. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que

i) $f^2 = Xf + X + 1$.

iii) $(X + 1)f^2 = X^3 + Xf$.

ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$.

iv) $f \neq 0$ y $f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2 f$.

20. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$, $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

ii) $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4$, $g = 2X^3 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

iii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$, $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

iv) $f = X^5 + X^3 + X + 1$, $g = 2X^2 + 1$ en $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.

v) $f = X^n - 1$, $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

21. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$.

ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$.

iii) El resto de la división de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

22. *Definición:* Sea K un cuerpo y sea $h \in K[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in K[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g \pmod{h}$.

Probar que:

i) $\equiv \pmod{h}$ es una relación de equivalencia en $K[X]$.

ii) Si $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$ y $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$.

iii) Si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iv) r es el resto de la división de f por h si y sólo si $f \equiv r \pmod{h}$ y $r = 0$ ó $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$.

23. Hallar el resto de la división de f por h para

i) $f = X^{353} - X - 1$, $h = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$, $h = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$, $h = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

24. Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $a \in K$. Probar que en $K[X]$ vale:

i) $X - a \mid X^n - a^n$.

ii) Si n es impar entonces $X + a \mid X^n + a^n$.

iii) Si n par entonces $X + a \mid X^n - a^n$.

Calcular los cocientes en cada caso.

25. Calcular el máximo común divisor entre f y g y escribirlo como combinación lineal de f y g siendo

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2$, $g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$.

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1$, $g = X^3 + X$.

iii) $f = X^5 + X^4 - X^3 + 2X - 3$, $g = X^4 + 2X + 1$.

Polinomios: evaluación y raíces.

26. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2$, $f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

27. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$.

28. i) Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 3 cuyas raíces complejas son exactamente $1, -\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$.
 ii) Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 4 cuyas raíces complejas son exactamente $1, -\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$.
29. *Evaluación de polinomios:* Sea $f = a_n x^n + \dots + a_0 \in K[X]$. Para $\alpha \in K$, se puede calcular $f(\alpha)$ por medio de los siguientes algoritmos:

- i) *Algoritmo ingenuo:* Se calculan todos los α^k recursivamente, guardando todos los resultados; luego se multiplica cada uno por su coeficiente a_k y se suma. ¿Cuántas sumas y cuántos productos se utilizan?
 ii) *Método de Horner:* Es el algoritmo que describe el mecanismo siguiente

$$n = 2 : f(\alpha) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha a_2)$$

$$n = 3 : f(\alpha) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \alpha a_3))$$

y, en general,

$$f(\alpha) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \alpha(a_3 + \dots + \alpha(a_{n-2} + \alpha(a_{n-1} + \alpha a_n)) \dots))).$$

¿Cuántas sumas y cuántos productos se utilizan?

30. Hallar las raíces en \mathbb{C} y factorizar en $\mathbb{C}[X]$ los polinomios cuadráticos

i) $X^2 - 2X + 10$.

iii) $X^2 + (1 + 2i)X + 2i$.

ii) $X^2 - (3 + 4i)$.

iv) $X^2 + (3 + 2i)X + 5 + i$.

31. Hallar las raíces en $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ y factorizar en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$ los polinomios cuadráticos

i) $X^2 + 6X + 1$.

ii) $X^2 + X + 6$.

32. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $X^6 + X^3 - 2$.

33. i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y de g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$.
 ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.

34. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1$.

ii) $f = 4X^4 + 5X^2 - 7X + 2, \quad a = \frac{1}{2}$.

iii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i$.

iv) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1), \quad a = 2$.

v) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3, \quad a = 2$.

35. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + a$ tiene sólo raíces simples en \mathbb{C} .

36. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $f = X^{2n+1} - (2n + 1)X + a$ tiene al menos una raíz múltiple en \mathbb{C} .

37. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en \mathbb{C} . Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.

38. i) Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 - 2X^5 + (1 + a)X^4 - 2aX^3 + (1 + a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X - 1)^2$.
 ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X - 1)^3$.

39. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que a sea raíz *doble* de $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2 + 3a)X - 2a$.

40. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ tiene todas sus raíces simples.

41. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X - i)(f_n + f'_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que i es raíz *doble* de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

42. i) Sea $f \in \mathbb{C}[X]$. Probar que $a \in \mathbb{C}$ es raíz de multiplicidad k de f si y sólo si es raíz de multiplicidad $k - 1$ de $(f : f')$.

ii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$. Probar que si f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$, entonces tiene todas sus raíces (en \mathbb{C}) simples.

Polinomios: factorización.

43. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ los polinomios

i) $X^6 - 8$.

iii) $X^7 - (-1 + i)$.

v) $X^6 - (2 - 2i)^{12}$.

ii) $X^4 + 3$.

iv) $X^{11} - 2i(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^{-1}$.

vi) $X^{12} + X^6 + 1$.

44. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios

i) $X^3 - 1$.

ii) $X^4 - 1$.

iii) $X^6 - 1$.

iv) $X^8 - 1$.

45. Factorizar en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios

i) $X^6 - 8$.

ii) $X^4 + 3$.

iii) $X^{12} + X^6 + 1$.

46. Factorizar los polinomios

i) $X^4 - 1$ en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$

iii) $X^4 - 1$ en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$

ii) $X^4 + 3$ en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$

iv) $X^4 + X^3 + X^2$ en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$.

47. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\sum_{k=0}^n X^k$ tiene todas sus raíces complejas simples.

48. i) Hallar todas las raíces racionales de

(a) $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$.

(b) $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$.

(c) $3X^4 + 8X^3 + 6X^2 + 3X - 2$.

ii) Probar que $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$ no tiene raíces racionales.

49. i) Hallar todas las raíces complejas de $f = X^5 - 4X^4 - X^3 + 9X^2 - 6X + 1$ sabiendo que $2 - \sqrt{3}$ es raíz de f .

ii) Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónico de grado mínimo que tenga a $1 + 2\sqrt{5}$ y a $3 - \sqrt{2}$ como raíces.

iii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado 5. Probar que si $\sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{3}$ son raíces de f entonces f tiene una raíz racional.

iv) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1 + \sqrt{2}) = 3$, $f(2 - \sqrt{3}) = 3$ y $f(1 + \sqrt{5}) = 3$. Calcular el resto de la división de f por $(X^2 - 2X - 1)(X^2 - 4X + 1)(X^2 - 2X - 4)$.

50. Factorizar los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

- i) $X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$.
- ii) $X^4 - 6X^2 + 1$.
- iii) $X^5 - X^3 + 17X^2 - 16X + 15$ sabiendo que $1 + 2i$ es raíz.
- iv) $X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 - 1$ sabiendo que $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ es raíz.
- v) $X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$ sabiendo que $\sqrt{2}i$ es raíz múltiple.
- vi) $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$ sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.
- vii) $X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 13X^2 - 15X + 10$ sabiendo que una de sus raíces es una raíz sexta primitiva de la unidad.

51. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = X^4 - (a+4)X^3 + (4a+5)X^2 - (5a+2)X + 2a$ tenga a a como raíz *doble*. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

52. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 2 es una raíz múltiple del polinomio

$$f = aX^5 + 8X^4 - 26X^3 + 44X^2 - 40X - (32a + 16).$$

Para cada valor de a hallado factorizar el polinomio en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$.

53. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales al menos una de las raíces de

$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

sea una raíz sexta primitiva de la unidad. Para cada valor de $a \in \mathbb{Q}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

54. Sean a , b y c las raíces complejas de $2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$.

i) Calcular:

- | | | |
|--------------------|-----------------------|---|
| (a) $a + b + c$ | (d) $a^2 + b^2 + c^2$ | (g) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ |
| (b) $ab + ac + bc$ | (e) $a^3 + b^3 + c^3$ | (h) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ |
| (c) abc | (f) $a^4 + b^4 + c^4$ | (i) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ |

ii) Encontrar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $a + b$, $a + c$ y $b + c$.

55. Factorizar el polinomio $X^4 + X^3 - 3X^2 + 4X - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que la suma de tres de sus raíces es $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

56. Hallar todas las raíces complejas del polinomio $X^6 - X^5 - 7X^4 - 7X^3 - 7X^2 - 8X - 6$ sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 2 y cuyo producto es -6 .

- 57. i) ¿Cuántos polinomios mónicos de grado 2 hay en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$? ¿Cuántos de ellos son reducibles y cuántos irreducibles?
- ii) Sea p un número primo. ¿Cuántos polinomios mónicos de grado 2 hay en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$? ¿Cuántos de ellos son reducibles y cuántos irreducibles?