FCEyN - UBA - Verano 2015

Álgebra I
Práctica 2 - Números Naturales e Inducción

<u>*Sumatoria*</u>

1. i) Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

(a) $1+2+3+4+\cdots+100$,
(b) $1+2+4+8+16+\cdots+1024$,
(c) $1+(-4)+9+(-16)+25+\cdots+(-144)$,
(d) $1+9+25+49+\cdots+441$,
(e) $1+3+5+\cdots+(2n+1)$,
(f) $n+2n+3n+\cdots+n^2$.

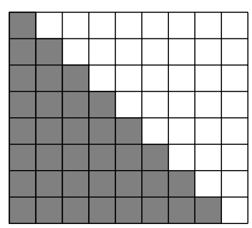
ii) Reescribir cada una de los siguientes productos usando el símbolo de productoria y/o de factorial

(a) $5\cdot 6\cdots 99\cdot 100$, (b) $1\cdot 2\cdot 4\cdot 8\cdot 16\cdots 1024$, (c) $n\cdot 2n\cdot 3n\cdots n^2$.

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos o factores de las expresiones siguientes

i) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$, ii) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$, iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$, iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$, v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3}$.

3. i) Probar que para todo $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ contando de dos maneras la cantidad de cuadraditos sombreados del diagrama



ii) Deducir que para todo $n\in\mathbb{N}$, $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$.

4. Calcular

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(4i+1)$, ii) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$.

5. Sea $a,b\in\mathbb{R}$. Probar que para todo $n\in\mathbb{N}$, $a^n-b^n=(a-b)\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}b^{n-i}$. Deducir la fórmula para la suma de los primeros términos de una progresión geométrica: para todo $a\neq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

6. Calcular

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i$,

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} q^i$ para $q\in\mathbb{R}$,

iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^{2i}$ para $q\in\mathbb{R}$,

iv) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} q^i$ para $q\in\mathbb{R}$.

7. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+1}-a_1$.

ii) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\displaystyle\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$),

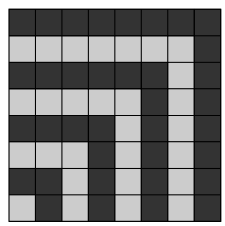
iii) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\displaystyle\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}$).

8. Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i i}{(2i-1)(2i+1)}$ para $n\in\mathbb{N}$.

<u>*Inducción*</u>

9. Probar que para todo $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$:

i) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama



ii) usando el ejercicio 3,

iii) usando el principio de inducción.

10. *(Suma de cuadrados y de cubos)* Probar que para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

11. Probar que para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\,i^2=\frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$,

ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{-1}{4i^2-1}=\frac{n+1}{2n+1}$,

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i+1)\,3^{i-1}=n\,3^n$,

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i\,2^i}{(i+1)(i+2)}=\frac{2^{n+1}}{n+2}-1$,

v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2i-3}=2^n(1-2n)$.

12. Calcular $\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(1+a^{2^i})$ para $a\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$.

13. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n\in\mathbb{N}$

i) $n<2^n$,

ii) $3^n+5^n\geq 2^{n+2}$,

iii) $3^n\geq n^3$,

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{i+1}\leq 1+n(n-1)$,

v) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n}\frac{i}{2^i}\leq n$,

vi) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n}\frac{1}{2i-1}>\frac{n+3}{4}$.

vii) $n! \geq \dfrac{3^{n-1}}{2}$,

viii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$,

ix) $(5n)! \leq 5^{5n}(n!)^5$.

14. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.
¿En qué paso de la demostración se usa que $a \geq -1$?

15. Probar que

i) $n! \geq 3^{n-1}$ para todo $n \geq 5$,

ii) $3^n - 2^n > n^3$ para todo $n \geq 4$,

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n - 5$ para todo $n \geq 3$,

16. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que

i) la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$,

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi\,(n-2)$.

Recurrencia

17. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2^n \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2\,n\,a_n + 2^{n+1}n! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n\, n!$.

iii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = a_n + n(3n+1) \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

18. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^2$ para $n \in \mathbb{N}$.

ii) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

iii) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = n\,a_n$ para $n \in \mathbb{N}$.

iv) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$ para $n \in \mathbb{N}$.

19. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n^3$ para $n \in \mathbb{N}$.

ii) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1}n^2$ para $n \in \mathbb{N}$.

iii) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + (2n+1)3^{n-1}$ para $n \in \mathbb{N}$.

(Sugerencia: usar los Ejercicios 7(i), 10 y 11.)

20. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n \cdot n! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n!$ y, aplicando el Ej. 7(i), calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot i!$

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1 \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n^3$ y, aplicando el Ej. 7(i), calcular de otra manera $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ (c.f. Ej. 10).

21. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = n\, a_{n+1} + 2(n+1)a_n \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$

ii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$

iii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad 2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3n + 5 \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$

iv) $a_1 = -3, \quad a_2 = 6, \quad a_{n+2} = \begin{cases} -a_{n+1} - 3 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ a_{n+1} + 2a_n + 9 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$

22. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_0 = 2, \quad a_1 = 4, \quad a_{n+2} = 4\, a_{n+1} - 3\, a_n \quad \text{para } n \in \mathbb{N}_0.$

ii) $a_0 = 1, \quad a_1 = 4, \quad a_{n+2} = 4\, a_{n+1} - 3\, a_n \quad \text{para } n \in \mathbb{N}_0.$

iii) $a_0 = 1, \quad a_1 = 4, \quad a_{n+2} = 4\, a_{n+1} - 4\, a_n \quad \text{para } n \in \mathbb{N}_0.$

23. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2}\, a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n > n + \dfrac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

24. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\, a_i, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

ii) $a_1 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\Big), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iii) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \ + (n+1), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

25. Probar que todo número natural n se escribe como suma de distintas potencias de 2, incluyendo $2^0 = 1$ (sugerencia: considerar la mayor potencia de 2 menor o igual a n).

Número combinatorio

26. Probar que $\dbinom{2n}{n} > n\, 2^n$ para todo $n \geq 4$.

27. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 4a_n - 2\frac{(2n)!}{(n+1)!\, n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = \dbinom{2n}{n}$.

28. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\, a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

i) Probar que $a_n \leq \dfrac{1}{2n}\dbinom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Probar que $a_n > \dfrac{1}{3^{n-1}}\dbinom{2n}{n}$ para todo $n \geq 3$.

29. i) ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

ii) ¿Y si se pide que 1 pertenezca al subconjunto?

iii) ¿Y si se pide que 1 no pertenezca al subconjunto?

iv) ¿Y si se pide que 1 ó 2 pertenezcan al subconjunto, pero no simultáneamente los dos?

30. Dadas dos rectas paralelas en el plano, se marcan n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con vértices en esos puntos?

31. i) Sea A un conjunto con $2n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A de manera que todas las clases de equivalencia tengan exactamente n elementos?

ii) Sea A un conjunto con $3n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A de manera que todas las clases de equivalencia tengan exactamente n elementos?

32. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia en $\mathcal{P}(X)$ definida en el Ejercicio 51 de la Práctica 1:

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff A \cap \{1, 2, 3\} = B \cap \{1, 2, 3\}.$$

¿Cuántos conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$ de exactamente 5 elementos tiene la clase de equivalencia $\overline{A}$ de $A = \{1, 3, 5\}$?

33. Sea $X = \{1, 2, \ldots, 20\}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación de orden en $\mathcal{P}(X)$ definida en el Ejercicio 52 de la Práctica 1:

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff A \subseteq B$$

¿Cuántos conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ cumplen simultáneamente $\#A = 6$ y $A\,\mathcal{R}\,\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

34. En este ejercicio no hace falta usar inducción: se puede pensar en el significado combinatorio de $\dbinom{n}{k}$ (como la cantidad de subconjuntos de k elementos en un conjunto de n elementos).

i) Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = 4^n$ y deducir que $\dbinom{2n}{n} < 4^n$.

ii) Calcular $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$.

iii) Probar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$ $\left(\text{sug: } k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}\right)$.

iv) Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ $\left(\text{sug: } \dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}\right)$.

35. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ (sug: no hace falta usar inducción, aplicar el binomio de Newton).

36. Derivar a izquierda y derecha la igualdad $(x+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ y evaluar lo obtenido en $x = 1$.

¿Qué se obtiene? (Comparar con el Ej. 34(iii).)

Complejidad

37. Cálculo de a^n para a y n dados

En este ejercicio consideramos la multiplicación como una operación básica: vamos a medir la complejidad de un algoritmo según el número de multiplicaciones necesarias para ejecutarlo.

i) Algoritmo recursivo *secuencial*: Calcular las distintas potencias de a mediante

$$a^{k+1} = a \cdot a^k \qquad \text{para } k \geq 1$$

Calcular a^8, a^{11} y a^{15} mediante este algoritmo. ¿Cuántas operaciones se realizaron para calcularlos? ¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^n?

ii) Algoritmo recursivo *dividir y conquistar*:

- Para n una potencia de 2, calcular a^n mediante

$$a^{2^1} = a \cdot a \quad , \quad a^{2^{k+1}} = a^{2 \cdot 2^k} = a^{2^k + 2^k} = a^{2^k} \cdot a^{2^k}, \qquad \text{para } k \geq 1.$$

Calcular a^8 mediante este algoritmo. ¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^8? ¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^{2^k}?

- Para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, escribir n como suma de potencias de 2 (ver Ejercicio 25) y luego calcular a^n por multiplicación. Por ejemplo si $n = 11 = 1 + 2 + 2^3$, se obtiene

$$a^n = a^{1+2+2^3} = a \cdot a^2 \cdot a^{2^3}.$$

¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^{11}?
Calcular a^{15} mediante este algoritmo. ¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^{15}?

38. Un algoritmos de ordenación de datos: burbujeo

Dada una lista $(a(1), \dots, a(n))$ de n números reales, se la quiere ordenar de menor a mayor. Por ejemplo dada la lista $(4, 3, 5, 7, 2, 9, 1, 8)$ se quiere obtener la lista $(1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9)$ haciendo comparaciones entre elementos ¿$a(i) < a(j)$? y en función de la respuesta intercambiando si es necesario los elementos comparados. El algoritmo siguiente, llamado "burbujeo", funciona realizando varias pasadas por la lista como se describe a continuación.

En la primera pasada, compara el 1er elemento de la lista con el 2do, intercambiándolos si es necesario; luego pasa al 2do y hace lo mismo con el siguiente; luego al 3ro; etc. hasta recorrer todos los elementos de la lista. Por ejemplo, la primera pasada en el ejemplo de arriba da:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
\underline{4} & \underline{3} & 5 & 7 & 2 & 9 & 1 & 8 & \to & 3 & \underline{4} & \underline{5} & 7 & 2 & 9 & 1 & 8 & \to & 3 & 4 & \underline{5} & \underline{7} & 2 & 9 & 1 & 8 & \to \\
3 & 4 & 5 & \underline{7} & \underline{2} & 9 & 1 & 8 & \to & 3 & 4 & 5 & 2 & \underline{7} & \underline{9} & 1 & 8 & \to & 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & \underline{9} & \underline{1} & 8 & \to \\
3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & \underline{9} & \underline{8} & \to & 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & 8 & 9 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Nótese que luego de la primera pasada, el elemento más grande quedará a la derecha (¿por qué?) y entonces no deberá ser considerado en las siguientes pasadas.

El algoritmo realiza luego sucesivas pasadas, hasta encontrar una pasada en la que no se haya producido ningún cambio; en ese punto la lista estará ordenada (¿por qué?). Nótese también que, en cada pasada, se considera un elemento menos que en la pasada anterior.

i) ¿Cuántas comparaciones se usan en la primera pasada de esa lista? ¿Y en la segunda? ¿Cuántas comparaciones son necesarias para ordenar esa lista?

ii) ¿Cuántas comparaciones se usan en la primera pasada de una lista de n elementos? ¿Y en la segunda? ¿Cuántas comparaciones son necesarias para ordenar una lista de n elementos?