MATEMATICA 2 - Verano de 2015

Práctica 5 - Diagonalización y subespacios invariantes

Ejercicio 1.

i) Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$).

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

ii) Para cada una de las matrices del ítem anterior, decidir si A es diagonalizable sobre K, para $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$. En caso afirmativo, exhibir una matriz inversible $C \in K^{n\times n}$ y una matriz diagonal $D \in K^{n\times n}$ tales que $A = C.\,D.\,C^{-1}$.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal $f(x, y, z) = (-2x-2y+6z, 4y, -x-3y+3z)$.

i) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

ii) Calcular $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iii) Hallar, si es posible, una matriz $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $M^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3. Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que f es diagonalizable (Sugerencia: ver Práctica 3). Calcular $\mathcal{X}_f$.

Ejercicio 4. Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Mostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $f(x) = e^{\lambda x}$ es un autovector de δ asociado al autovalor λ. (Observar que entonces δ tiene infinitos autovalores.)

Ejercicio 5. Sea $A \in K^{n\times n}$.

i) Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

ii) Probar que A es inversible si y sólo si 0 no es autovalor de A.

iii) Probar que si A es inversible y v es un autovector de A, entonces v es un autovector de A^{-1}.

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$. Determinar todos los a, b y $c \in K$ tales que A es diagonalizable.

Ejercicio 7. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8. Dada $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, calcular $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.
Sugerencia: No es necesario calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}$ explícitamente.

Ejercicio 9.

i) Se define la sucesión de Fibonacci $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Verificar que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $A.\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$.

b) Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$.

c) Encontrar una matriz inversible C tal que $C^{-1}.A.C$ sea diagonal.

d) Hallar la fórmula general para el término a_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

ii) Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1 \\ a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 10.

i) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.
Sugerencia: Hallar una matriz inversible $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $C^{-1}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} C$ sea diagonal y hacer el cambio de variables $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

ii) Probar que $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : f'' = f\} = < e^x, e^{-x} >$.
Sugerencia: Llamar $g = f'$ y considerar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f' = g \\ g' = f \end{cases}$.

Ejercicio 11. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

i) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

iii) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

Ejercicio 12.

i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x+3y, 3x-2y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f-invariantes.

ii) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ, definida por $|f_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Probar que, para todo $\theta \neq k.\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ-invariantes.

iii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

¿Es g_θ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{C}^2$ que sean g_θ-invariantes.

Ejercicio 13. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

i) Probar que el subespacio $< (2, -1, 0, 0), (-1, 2, -1, 0) >$ es f_A-invariante.

ii) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$|f_A|_B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 14.

i) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\mathcal{X}_A(x) = (x-\alpha)(x-z)(x-\bar{z})$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Sea $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (resp. $g_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$) la transformación lineal cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{C}^3$) es A.

a) Probar que existe v_1, autovector de g_A de autovalor α, con todas sus coordenadas reales.

b) Sea $w = v_2 + iv_3$, con $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, un autovector de g_A asociado al autovalor z. Probar que $\overline{w} = v_2 - iv_3$ es un autovector de g_A de autovalor $\bar{z}$.

c) Probar que $< v_2, v_3 > \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio f_A-invariante de dimensión 2.

d) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Verificar que B es una base de $\mathbb{R}^3$ y hallar $|f_A|_B$.

ii) Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Hallar subespacios propios S y T de $\mathbb{R}^3$, f_A-invariantes, tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, 0).$$

i) Hallar, para cada $0 \leq i \leq 5$, un subespacio S_i de $\mathbb{R}^5$ con $\dim(S_i) = i$ que sea f-invariante.

ii) Probar que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de $\mathbb{R}^5$ tales que $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$.