Práctica 4

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Decidir en cada caso si corresponde $\subseteq, \supseteq$ ó $=$ y probarlo.

$$\begin{array}{cccc}
(i) & f(A \cup B) & \ldots\ldots & f(A) \cup f(B) \\
(ii) & f^{-1}(X \cup Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
(iii) & f(A \cap B) & \ldots\ldots & f(A) \cap f(B) \\
(iv) & f^{-1}(X \cap Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
(v) & f(A^c) & \ldots\ldots & (f(A))^c \\
(vi) & f^{-1}(X^c) & \ldots\ldots & (f^{-1}(X))^c
\end{array}$$

2. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Probar que $lim_{x \to a^+} f(x) = l$ si y solo si para toda sucesión estrictamente decreciente $\{x_n\}$ tal que $lim_{n\to\infty} x_n = a$, vale $lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

3. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona y $x \in (a, b]$. Demostrar que si existe una sucesión $\{x_n\} \subset (a, b]$ tal que $x_n < x$ para todo n, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$, entonces $f(x^-) = l$.

   Enunciar el resultado correspondiente para $f(x^+)$.

4. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ tales que $f(A) \subset B$. Si f es continua en $a \in A$ y g es continua en $f(a)$, probar que $g \circ f$ es continua en a.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Demostrar que f es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre $\mathbb{Q}$ son la misma función.

6. Hallar todos los puntos donde la función f es continua, siendo

   (a) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

7. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. *Sugerencia.* Considerar la función $x - f(x)$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que son equivalentes:
   (a) f es continua (en todo $\mathbb{R}$).
   (b) $f^{-1}(O)$ es abierto para todo $O \subseteq \mathbb{R}$ abierto.
   (c) $f^{-1}(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que el gráfico de f es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$.

10. Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Probar que f alcanza su mínimo valor.

12. Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar :
    (a) $\{|x| : x \in K\}$ es compacto.
    (b) Dado $c \in f(K)$ existe entre las raíces x de la ecuación $f(x) = c$, una de módulo mínimo.

13. * Considérese el conjunto $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Dado que este conjunto es numerable e infinito se puede escribir: $\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Se define $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente:
    $$f(x) = \sum_{n \in \Omega_x} \frac{1}{2^n}$$
    donde $\Omega_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x\}$.

    Demostrar que:
    (a) f está bien definida.
    (b) f es una función monótona creciente.
    (c) f es discontinua en todo punto del conjunto $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$; más aún: para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f(x_n+) - f(x_n-) = \dfrac{1}{2^n} > 0$.
    (d) f es continua a izquierda en todo $x \in (0, 1)$; es decir, para todo $x \in (0, 1)$ vale que $f(x-) = f(x)$.
    (e) f es continua en todo punto del conjunto $(0, 1) - \mathbb{Q}$.

14. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:
    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = |x|$.
    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = x^2$.
    (c) $f : (r, +\infty) \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sqrt{x}$, con $r = 0$ y con $r > 0$.
    (d) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
    (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

15. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f, g : S \to \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas.

    (a) Probar que $f + g$ es uniformemente continua.

    (b) Mostrar con un ejemplo que $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua, aún si alguna de las funciones f ó g es acotada.

    (c) Probar que si $h : f(S) \to \mathbb{R}$ es otra función uniformemente continua entonces $h \circ f : S \to \mathbb{R}$ también lo es.

16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$. Probar que f es uniformemente continua en $[a, c]$.

    ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y también sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, entonces lo es en $A \cup B$?

17. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 y α números reales. Se dice que f es localmente Lipschitz de orden α en el punto x_0 si existen $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que*

    $$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \quad \textit{para todo } x \quad \textit{tal que} \quad 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

    M se llama la constante de Lipschitz de f. Cuando el orden $\alpha = 1$ decimos simplemente que f es Lipschitz.

    (a) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 entonces f es continua en x_0.

    (b) Mostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0, entonces es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$.

18. *Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es Lipschitz si existe una constante $M > 0$, llamada la constante de Lipschitz de$f$, tal que*

    $$|f(x) - f(y)| < M|x - y| \textit{ para todo } x\ , y \in A.$$

    Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz pero sin embargo f es uniformemente continua (en particular "*unif. cont.* $\not\Rightarrow$ *Lipschitz*").

19. Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz con constante igual a $M < 1$. Demostrar que si S es cerrado, y $f(S) \subseteq S$ entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$, en otras palabras, f *tiene un punto fijo.*

    Sugerencia. Considerar la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en S construída recursivamente así: $x_1 \in S$ cualquiera, si x_n está definido se toma $x_{n+1} := f(x_n)$, en otras palabras, $x_{n+1} := f^{(n)}(x_1)$. Demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy; tomar $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

    Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone S cerrado.

20. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2}$. Demostrar que f es Lipschitz con $M = 1$ pero que f no tiene puntos fijos.

    Sugerencia. Considerar la función $g : K \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = |x - f\,(x)\,|$.

21. En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto $S \subset \mathbb{R}$:

    (a) $f_n(c) = x^n$, $S = (-1, 1]$.

    (b) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$, $S = (1, +\infty)$.

    (c) $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$, $S = [0, 1]$.

22. (a) Probar que la sucesión del ejercicio **??**(a) converge uniformemente en $T = (0, 1/2)$, pero en $S = (-1, 1]$ converge puntualmente a una función que no es continua.

    (b) Probar que la sucesión del ejercicio **??**(b) converge uniformemente en $T = [2, 5]$.

23. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:

    (a) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, sobre todo $\mathbb{R}$.

    (b) $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$, sobre todo $\mathbb{R}$.

    (c) $f_n(x) = \frac{n}{n+1}x$, sobre todo $\mathbb{R}$.

24. Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : S \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f : S \to \mathbb{R}$. Probar que si f_n es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces vale:

    (a) f es acotada.

    (b) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in S$ y todo $n \in \mathbb{N}$ (en otras palabras, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada).

25. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = n^2 x(1 - x)^n.$$

    (a) Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función cero en el intervalo $[0, 1]$.

    (b) Verificar que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ pero que el límite no puede 'pasar adentro de la integral'. Es decir, ver que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))\,dx$

26. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones derivables definidas sobre el intervalo $[a, b]$. Supongamos que $\{f_n'\}$ converge uniformemente en $[a, b]$. Probar que si existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $\{f_n(x_0)\}$ converge, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a, b]$.

27. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas en $S \subset \mathbb{R}$. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Si $|f_n(x)| \leq a_n$ para todo $x \in S$, $n \in \mathbb{N}$, se sigue que la sucesión $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ converge uniformemente en S.