ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano 2014

Práctica 3 - Matrices

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

   (a) $A + 3B - 3C$.
   (b) $A + 3(B - C)$.
   (c) $A - (B - 2C)$.
   (d) $A - B + 2C$.

2. Se consideran matrices de los siguientes tamaños: $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, $B \in \mathbb{R}^{5\times 7}$, $C \in \mathbb{R}^{7\times 5}$. Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.

   (a) $A \cdot B$.
   (b) $B \cdot A$.
   (c) $B \cdot C$.
   (d) $C \cdot B$.
   (e) $A \cdot B \cdot C$.
   (f) $B \cdot C \cdot A$.
   (g) $A \cdot A$.
   (h) $B \cdot C \cdot B \cdot C$.

3. Cuando sea posible, calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

   (a) A^2.
   (b) B^3.
   (c) $-2A^2 + B^3 A$.

5. Mostrar, dando un contraejemplo, que la propiedad "$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$" no es válida para matrices.

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ analizar si son válidas (para matrices) las fórmulas clásicas de factorización:

   (a) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   (b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular:

   (a) A^t y B^t.
   (b) $(A \cdot B)^t$ y $B^t \cdot A^t$.

8. Dar ejemplos, si existen, de matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $A \neq 0$ y $A \neq I$ (distinta de la matriz nula y de la matriz identidad) que cumplan:

   (a) $A^2 = I$.
   (b) $A^2 = 0$.
   (c) $A^2 = A$.
   (d) $A \cdot B = B \cdot A$ para toda matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

9. Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calcular los siguientes productos y analizar el resultado en términos de la matriz A. ¿Qué cambios producen los productos en la matiz A?

   (a) $A \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \cdot A$.
   (b) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$.
   (c) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.
   (d) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.

10. Calcular, si es posible, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices verificando que la matriz hallada es efectivamente la inversa.

    (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
    (b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
    (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
    (d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
    (e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
    (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Verificar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ son inversibles y calcular:

    (a) A^{-1} y B^{-1}.
    (b) $(AB)^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, verificar que:

    (a) si $ad - bc \neq 0$, entonces A es inversible con inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
    (b) si $ad - bc = 0$, entonces A no es inversible.

13. Considerar el sistema lineal

$$S : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 6 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

    Reescribir el sistema como producto de matrices (notación matricial). Hacer lo mismo para el sistema homogéneo asociado.

14. Reescribir, mostrando las ecuaciones, el sistema lineal $A \cdot \bar{x} = b$ en cada uno de los siguientes casos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

15. En cada uno de los siguientes casos hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ o $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, según corresponda, tales que:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

16. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que verifican $A \cdot X + 2X = B^t \cdot X + \frac{1}{2} C$ para

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

17. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que verifican $A \cdot X = 2X + B^t$ para

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.