Análisis I – Matemática I – Análisis II (C) – Análisis Matemático I (Q)
VERANO - 2014

Práctica 8: Cambio de variables y aplicaciones

1. ***Coordenadas Polares***: Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\mathrm{sen}\,(\theta)$ y $g(r,\theta) := f(x,y)$.

   Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ y $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$, imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.

2. Sean $D^* = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta < 2\pi\}$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ y T la transformación de coordenadas polares a cartesianas, es decir,

   $T(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\mathrm{sen}\,\theta)$.

   (a) Mostrar que $T(D^*) = D$. ¿T es biyectiva ?

   (b) ¿En qué se transforma el rectángulo $[r, r + \Delta r] \times [\theta, \theta + \Delta\theta]$ al aplicarle T?.

   (c) Calcular la matriz $DT(r,\theta)$. ¿En qué transforma la aplicación dada por esta matriz al rectángulo dado en el ítem (b)?. ¿Y en el caso $r = 0$?.

   (d) Relacionar con la fórmula de cambio de variables en este caso, haciendo los dibujos correspondientes.

3. Sean $D_1 = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta < 4\pi\}$ y T la transformación definida en el ejercicio anterior.

   (a) Hallar $D = T(D_1)$.

   (b) Calcular $\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ y $\int_{D_1} r^2 J\, drd\theta$, siendo J el jacobiano de la transformación T.

   ¿Las integrales coinciden?. De ser cierto, ¿por qué?.

4. Calcular el área de un círculo de radio r y el de una elipse con semiejes de longitud a y b.

5. (a) Sean $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (4u, 2u + 3v)$ y D^* el rectángulo $[0,1] \times [1,2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular las siguientes integrales haciendo un cambio de variables para transformarlas en integrales sobre D^*.

   i. $\displaystyle\int_D xy\, dxdy.$

   ii. $\displaystyle\int_D (x - y)\, dxdy.$

   Repetir el ítem anterior para $T(u,v) = (u, v(1+u))$.

6. Sean $T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ y $D^* = \{(u,v) : u^2 + v^2 \le 1, u \ge 0, v \ge 0\}$.

(a) Hallar $D = T(D^*)$ y calcular su área.

(b) Calcular:

$$\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

haciendo el cambio de variables del ítem anterior.

7. Calcular $\int_D (x^2+y^2)^{3/2}\, dxdy$, donde D es el disco de centro $(0,0)$ y radio 2.

8. Hallar el área dentro de la curva $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$, sabiendo que $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$.

9. Dado el paralelogramo P del plano xy con vértices (0,0) , (2,10) , (3,17) y (1,7),

   (a) hallar una transformación lineal que convierta a P en un rectángulo R del plano uv con vértices opuestos en $(0,0)$ y $(4,2)$.

   (b) calcular la integral $\displaystyle\int_P xy\, dxdy$ transformándola en una integral sobre el rectángulo R.

10. Es sabido, aunque difícil de demostrar, que una primitiva de la función e^{-x^2} no puede expresarse en términos de las funciones elementales usuales, dificultando el cálculo de $\displaystyle\int_a^b e^{-x^2}\, dx$. Sin embargo, el siguiente truco permite calcular de manera simple la integral impropia

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx$$

   (a) Mostrar que $I^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$.

   (b) Calcular la integral del ítem (a) como límite de integrales en círculos utilizando coordenadas polares.

11. Hallar el área acotada por la curva "lemniscata"

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2).$$

12. Calcular $\displaystyle\int_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dxdy$, donde A está determinado por las condiciones

$$x^2+y^2 \leq 1 \quad \text{y} \quad x+y \geq 1.$$

13. (a) ***Coordenadas Esféricas***: Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x = r\cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi)$, $z = r\cos(\phi)$ y $g(r,\theta,\phi) = f(x,y,z)$.

   Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,\phi)$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta,\phi)$ y $\dfrac{\partial g}{\partial \phi}(r,\theta,\phi)$, imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.

(b) ***Coordenadas Cilíndricas***: Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\text{sen}\,(\theta)$ y $g(r,\theta,z) = f(x,y,z)$.
Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,z)$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta,z)$ y $\dfrac{\partial g}{\partial z}(r,\theta,z)$, imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.

14. Integrar $ze^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro dado por $x^2+y^2 \le 4$, $2 \le z \le 4$.

15. Calcular el volumen de un cilindro con base circular de radio r y altura h.

16. (a) Calcular el volumen $V(r)$ de una esfera B_r de radio r.

    (b) Sea $\partial(B_r)$ la superficie del borde de la esfera B_r y $A(\partial(B_r))$ a su área, demostrar que $\frac{\partial V}{\partial r}(r) = A(\partial(B_r))$.
    ¿Cuánto es el valor del área?.

17. Integrar $x^2+y^2+z^2$ sobre el cilindro dado por $x^2+y^2 \le 2$, $-2 \le z \le 3$.

18. Sea B la bola cerrada unitaria definida por $B := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$. Calcular
$$\int_B \frac{dxdydz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}.$$

19. Calcular
$$\int_S \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
donde S es el sólido acotado por dos esferas de radios a y b respectivamente, con $0 < b < a$ y centradas en el origen.

20. Calcular $\displaystyle\int_B z\,dxdydz$ donde B es la región sobre el plano xy, dentro del cilindro $x^2+y^2 \le 1$ y debajo del cono $z = (x^2+y^2)^{1/2}$.

21. Sea E el elipsoide dado por $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \le 1$.

    (a) Hallar el volumen de E.

    (b) Calcular $\displaystyle\int_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)]\,dxdydz$.

Aplicaciones

22. Si un sólido W tiene densidad ρ, su **masa** está dada por
$$\int_W \rho(x,y,z)\,dxdydz.$$
Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2+y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2+y^2$, si la densidad es $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

23. Sea ρ la densidad de un sólido W. Se definen los **primeros momentos** de W respecto de los planos coordenados M_{yz}, M_{xz} y M_{xy}, como

$$\int_W x\rho(x,y,z)\,dxdydz,\ \int_W y\rho(x,y,z)\,dxdydz,\ \int_W z\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

respectivamente, y su **centro de masa** como

$$\left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M}\right),$$

donde M es la masa de W.

Hallar el centro de masa del cilindro definido por $x^2 + y^2 \leq 1$ y $1 \leq z \leq 2$, si su densidad es $\rho = (x^2 + y^2)z^2$.

24. Si un sólido W tiene densidad uniforme ρ, el **momento de inercia** alrededor del eje x esta definido por

$$I_x = \int_W \rho(y^2 + z^2)\,dxdydz.$$

Análogamente se definen I_y e I_z.

Sea ahora W el sólido con densidad constante acotado por arriba por el plano $z = a$ y por debajo por el cono descripto en coordenadas esféricas por $\phi = k$, donde k es una constante acotada $0 < k < \pi/2$.

Dar la integral para su momento de inercia alrededor del eje z.

25. Hallar el momento de inercia alrededor del eje y para la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ si la densidad de masa es una constante ρ.

26. Dado un sólido W con densidad de masa $\rho(x,y,z)$, la fuerza gravitacional $\mathbf{F}$ que ejerce W sobre una masa m en (x_1, y_1, z_1) está dada por el gradiente de una función V llamada potencial gravitacional, es decir, $\mathbf{F}=-\nabla V$. El **potencial gravitacional** está definido por

$$V(x_1,y_1,z_1) = Gm\int_W \frac{\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

donde G es la constante de gravitación universal.

(*a*) Hallar el potencial gravitacional sobre una masa m de un planeta esférico con una masa $M = 3\ 10^{26}$kg, a una distancia de $2\ 10^8$m de su centro.

(*b*) Hallar la fuerza gravitacional ejercida sobre un objeto de 70kg en la posición indicada en el ítem (*a*).