

Práctica 7: Integración

Integración en una variable

1. Calcular:

$$(a) \int x \operatorname{sen} x \, dx. \quad (c) \int x e^{x^2} \, dx. \quad (e) \int \frac{3x - 2}{x^2 + x - 2} \, dx.$$
$$(b) \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx. \quad (d) \int e^x \operatorname{sen} x \, dx. \quad (f) \int \ln x \, dx.$$

2. Hallar el área encerrada por las curvas:

- (a) $y = x^3$ e $y = x$.
(b) $y = x^3 - x$ y la recta tangente a esta curva en $x = -1$.
(c) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ y la recta $y = 12$ entre $x = 0$ y $x = 3$.
(d) $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$.

3. (a) Calcular $\int_{-2}^0 e^x \, dx$.

(b) Hallar el área encerrada por las curvas: $y = 0$, $y = -2$, $y = \log x$ y $x = 0$.

4. Calcular:

$$(a) \int_{-2}^3 x^2 - 1 \, dx. \quad (c) \int_{-2}^3 |x^2 + 1| \, dx.$$
$$(b) \int_{-2}^3 |x^2 - 1| \, dx. \quad (d) \int_1^4 \sqrt{|x - 3|} \, dx.$$

Integrales impropias

5. (a) Calcular, de ser posible (si no explicar por qué), las siguientes integrales $\forall p > 0$:

$$\text{i. } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, dx \quad \text{ii. } \int_0^1 \frac{1}{x^p} \, dx \quad \text{iii. } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, dx$$

Sugerencia: Separar el estudio de las integrales en estos grupos $0 < p < 1$, $p = 1$ y $p > 1$.

(b) Relacionar los resultados obtenidos con el hecho de que para $x > 0$, x^{-p} y $x^{-\frac{1}{p}}$ son funciones inversas y, por lo tanto, el gráfico de una es el de la otra reflejado respecto de la recta $y = x$.

(c) ¿Para qué valores de $p > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge?

6. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$(a) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}. \quad (f) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}. \quad (j) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + \cos x} dx.$$

$$(b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (g) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}. \quad (k) \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(2x) dx.$$

$$(c) \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx. \quad (h) \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} dx. \quad (l) \int_0^4 \frac{x}{x^2-4} dx.$$

$$(d) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx. \quad (i) \int_{-1}^3 \frac{dx}{(1-x)^3}. \quad (m) \int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{-x^3+3x^2-2x}} dx.$$

Calcular el valor principal en los ítems (i), (k) y (l).

7. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, ¿son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones?

(a) Si $f > 0$ es continua con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}_{>0}$, entonces $\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty$.

(b) Si $f > 0$ es continua con $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \in \mathbb{R}_{>0}$, entonces $\int_0^{-\infty} f(x) dx = -\infty$.

(c) Si f es continua y decreciente con $\int_4^{+\infty} f(x) dx = 3$, entonces el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(d) Si $f > 0$ es continua con $\int_4^{+\infty} f(x) dx = 8$, entonces el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(e) Si $f > 0$ es continua con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty$.

8. Analizar la convergencia de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1+x^2)} \quad (\forall p \in \mathbb{R}).$$

Integrales dobles

9. Sabiendo que $R := [0, 1] \times [0, 1]$ calcular las siguientes intergrales:

$$\begin{array}{ll}
 (a) \iint_R (x^3 + y^2) \, dx \, dy & (e) \iint_R (x^m y^n) \, dx \, dy, \quad (m, n > 0) \\
 (b) \iint_R y e^{xy} \, dx \, dy & (f) \iint_R (ax + by + c) \, dx \, dy \\
 (c) \iint_R (xy)^2 \cos x^3 \, dx \, dy & (g) \iint_R \operatorname{sen}(x + y) \, dx \, dy \\
 (d) \iint_R \ln[(x + 1)(y + 1)] \, dx \, dy & (h) \iint_R (x^2 + 2xy + yx^{1/2}) \, dx \, dy
 \end{array}$$

10. Calcular el volumen del sólido acotado por los planos xz , yz , xy , $x = 1$ y $y = 1$, y la superficie $z = x^2 + y^4$.

11. Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente. Sabiendo que R es el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$, mostrar que

$$\iint_R f(x)g(y) \, dx \, dy = \left(\int_a^b f(x) \, dx \right) \left(\int_c^d g(y) \, dy \right).$$

12. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z = \operatorname{sen} y$, y los planos xy , $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$ e $y = \pi/2$.

13. Sean $F \in \mathcal{C}^2$ y $f(x, y) := \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$. Calcular $\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx \, dy$ en términos de F .

14. Graficar las regiones determinadas por los límites de integración de las siguientes integrales y calcularlas.

$$\begin{array}{ll}
 (a) \int_0^1 \int_0^{x^2} dy \, dx & (g) \int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy \, dx \\
 (b) \int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy \, dx & (h) \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \operatorname{sen} x \, dy \, dx \\
 (c) \int_0^1 \int_1^{e^x} (x + y) \, dy \, dx & (i) \int_0^1 \int_{y^2}^y (x^n + y^m) \, dx \, dy, \quad (m, n > 0) \\
 (d) \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y \, dy \, dx & (j) \int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x \, dy \, dx \\
 (e) \int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2 + y) \, dx \, dy & (k) \int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen} y} y \, dx \, dy \\
 (f) \int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} \, dy \, dx & (l) \int_{-2}^0 \int_{x^3}^{x+1} (y^2 + 1) \, dy \, dx
 \end{array}$$

15. Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 2y & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mostrar que la integral iterada $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$ existe pero f no es integrable. ¿Existe la otra integral iterada?

16. Calcular el área de:

(a) la región limitada por la recta $y = x$ y por la curva $y = x^2$.

(b) la región formada por todos los puntos (x, y) tales que $|x| + |y| \leq a$, $a \geq 0$.

17. Calcular

$$\iint_T [x \operatorname{sen} x + y \operatorname{sen}(x + y)] dx dy$$

siendo T el triángulo de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(3, 3)$.

18. Sea D la región acotada por los semiejes positivos de x e y y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

19. Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$.

Calcular

$$\iint_D x^3 y dx dy.$$

20. Calcular el volumen de un cono con radio de base r y altura h .

21. Calcular el volumen de las siguientes regiones:

(a) R : encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.

(b) R : encerrada por el cono de altura 4 dado por $z^2 = x^2 + y^2$.

(c) R : encerrada por las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

(d) R : determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$ y $z \geq 2$.

22. Cambiar el orden de integración, graficar las regiones correspondientes y calcular la integral de ambas maneras.

$$(a) \int_0^1 \int_x^1 xy dy dx$$

$$(d) \int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x + y)^2 dx dy$$

$$(b) \int_0^1 \int_1^{2-y} (x + y)^2 dx dy$$

$$(e) \int_{-3}^3 \int_{-(9-y^2)^{1/2}}^{(9-y^2)^{1/2}} x^2 dx dy$$

$$(c) \int_0^1 \int_{2x}^{3x} x^2 y dy dx$$

23. Calcular $\int_D y^2 x^{1/2} dx dy$, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > x^2, y < 10 - x^2\}$.

24. Sea D la región limitada por las rectas $y = 2$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ e $y = 1$. Calcular la siguiente integral

$$\iint_D x^2 y \, dA.$$

25. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$. Calcular la siguiente integral

$$\iint_D \cos\left(\frac{x}{y}\right) \, dA.$$

26. Calcular $\int_T e^{x-y} \, dx dy$ donde T es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 3)$ y $(2, 2)$.

27. Sea T la región limitada por las rectas $y = x$, $y = \sqrt{2}$ y la curva $y = \sqrt{x}$. Calcular

$$\iint_R e^{\frac{x}{y}} \, dA.$$

Integrales triples

28. Calcular:

(a) $\iiint_C (xyz + x^2 y^2 z^2) \, dV$, donde $C = [0, 1] \times [-3, 2] \times [-1, 1]$.

(b) $\iiint_C (x \cos z + y \cos x + z \cos y) \, dV$, donde $C = [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$.

29. Calcular:

(a) $\iiint_W x \, dV$, donde W es la región limitada por $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y $z = x^2 + y^2$.

(b) $\iiint_W x^2 \cos z \, dV$, donde W es la región limitada por $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $x = 0$ y $x + y = 1$.

(c) $\iiint_W dV$, donde W es la región limitada por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 9 - x^2$.

(d) $\iiint_W (x + y + z) \, dV$, donde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| \leq 1\}$.

(e) $\iiint_W (x^3 + y + z) \, dV$, donde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq 1\}$.

30. Calcular $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x+y}^{x^2+y^2} dz dy dx$ y graficar la región de integración.

31. Cambiar el orden de integración en

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx$$

para obtener las otras cinco formas de realizar la misma integración. Graficar la región de integración.

32. Sea $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| \leq 1\}$. Demostrar que si f es una función continua en B , impar respecto de z (es decir $f(x, y, z) = -f(x, y, -z)$), entonces

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = 0.$$

Dar otros ejemplos donde valga este resultado.

33. Sea W la región determinada por las condiciones $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq z \leq xy$.

(a) Hallar el volumen de W .

(b) Calcular $\int_W x dx dy dz$.

(c) Calcular $\int_W y dx dy dz$.

(d) Calcular $\int_W z dx dy dz$.

(e) Calcular $\int_W xy dx dy dz$.