Análisis I – Matemática I – Análisis II (C) – Análisis Matemático (Q)
VERANO - 2014

Práctica 5: Teoremas de la Función Implícita e Inversa

Planos y rectas tangentes a superficies dadas de manera implícita en $\mathbb{R}^3$

1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio 1 centrada en el origen; es decir, la superficie de $\mathbb{R}^3$ determinada por
$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$
Mostrar que el vector $v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es normal a la superficie S en el punto $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Interpretar este hecho geométricamente.

2. Considerar la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ y demostrar que las rectas
$$\mathbb{L}_1 : t(0, 1, 1) + (1, 0, 0) \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : t(0, 1, -1) + (1, 0, 0)$$
son ortogonales y están contenidas en S.

   Utilizar este hecho para hallar la ecuación del plano tangente a S en el punto $(1, 0, 0)$.

3. Hallar, si existen, la ecuación del plano tangente y la ecuación de la recta normal a las superficies dadas en los puntos indicados,
   - (a) $x^{10}y - \cos(z)x + 7 = 0 \qquad (x_0, y_0, z_0) = (7, 0, 0)$
   - (b) $xy - z\ln(y) + e^{xy} = 1 \qquad (x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$
   - (c) $xy\ \operatorname{sen}(y) + ze^{xy} - z^2 = 0 \qquad (x_0, y_0, z_0) = (4, 0, 1)$
   - (d) $\cos(x)\cos(y)e^z = 0 \qquad (x_0, y_0, z_0) = (\pi/2, 1, 0)$

4. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0) y $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función definida por $h(x, y, z) = f(x, y) - z$. ¿Qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de f en (x_0, y_0) y el plano tangente a una superficie de nivel de h en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$?.

5. Encontrar los puntos de la superficie
$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\right\}$$
en los que plano tangente es paralelo al plano $\Pi : x + 4y + 6z = 8$.

6. Sea E el elipsoide definido por la ecuación $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + z^2 = 1$.
   - (a) Demostrar que si el punto $P \in E$, entonces $-P \in E$.
   - (b) Demostrar que el plano tangente a E en el punto P es paralelo al plano tangente a E en $-P$.

(c) Probar que si P y Q son dos puntos distintos de E y el plano tangente a P es paralelo al plano tangente a Q, entonces $Q = -P$.

Teoremas de la Función Implícita e Inversa

7. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal $T(x, y) = (3x - 2y, 5x - 2y)$. Mostrar que T es biyectiva y hallar su inversa T^{-1}. Calcular $DT^{-1}(x, y)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

8. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (x^3y + 3x^2y^2 - 7x - 4y, xy + y)$.

   (a) Demostrar que existe un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 1) \in U$, un entorno $V \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(-7, 2) \in V$ y una inversa $F^{-1} : V \to U$ C^1 tal que $F^{-1}(-7, 2) = (1, 1)$.

   (b) Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 tal que $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 2$, $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = 5$, y $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calcular $\frac{\partial (goF^{-1})}{\partial v}(-7, 2)$.

9. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$. Probar que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\det(DF(x, y)) \neq 0$, pero F no es inyectiva.

10. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2$.

    (a) Demostrar que $f(x, y, z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y, z)$ en el punto $(1, 1, 1)$.

    (b) Encontrar $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1)$.

11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x, y) = (yx^{3/2} + (y + 1)^2 - 6\ , (\ln(x) + 5)y - 4)$.

    (a) Probar que existe una inversa de f en un entorno del punto $p = (5, 6) = f(1, 2)$ y diferenciable en p.

    (b) Sean $v = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $w = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$ vectores en $\mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $q = (1, 2)$ tal que $\frac{\partial g}{\partial v}(1, 2) = 4$ y $\frac{\partial g}{\partial w}(1, 2) = 5$. Calcular $D(g \circ f^{-1})(5, 6)$.

12. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y, z) = x^2y + \ln(y)z - 1$.

    (a) Probar que la ecuación $f(x, y, z) = 0$ define implícitamente una función $y = \varphi(x, z)$ (diferenciable) en un entorno del punto $(x, z) = (1, 2)$ tal que $f(x, \varphi(x, z), z) = 0$ para todo (x, z) en dicho entorno.

    (b) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $Dg(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y que cumple que $g(2, -3) = (1, 2)$. Sea $v = (\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}})$. Calcular $\frac{\partial (\varphi \circ g)}{\partial v}(2, -3)$.

13. Sea $f(x, y) = x^2 - y^3$. Mostrar que, sobre la curva de nivel $f(x, y) = 0$, se puede despejar y en función de x (i.e. $y = \phi(x)$). ¿Es ϕ de clase C^1 en un entorno del cero? ¿Puede aplicarse el teorema de la función implícita en el punto $(0, 0)$?.

14. Hallar las funciones que quedan definidas implicitamente, en un entorno del punto dado, por medio de las siguientes ecuaciones. Determinar sus derivadas parciales en dicho entorno.
    (a) $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1 \quad a = (2, 0)$.
    (b) $g(x, y) = x^5 + y^2 + xy = 3 \quad a = (1, 1)$.
    (c) $h(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0 \quad a = (0, 0, 2)$.
15. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ y $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(p) = 0$ y $\nabla f(p) \neq 0$. Probar que f se anula en infinitos puntos de $\mathbb{R}^n$.