Análisis I – Matemática I – Análisis II (C) – Análisis Matemático I (Q)
VERANO - 2014

Práctica 4:
Derivadas parciales de orden superior - Polinomio de Taylor

Derivadas de orden superior

1. Calcular las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase C^2:

   (a) $f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$

   (b) $f(x,y,z) = ye^z + \frac{e^y}{x} + xy\,\mathrm{sen}(z)$

   (c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + \ln(z)$

2. Calcular todas las derivadas de tercer orden para las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y,z) = xyz$

   (b) $f(x,y,z) = e^{xyz}$

   (c) $f(x,y,z) = \cos(x^2+y) - \mathrm{sen}(y^2z)$

   (d) $f(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}$

3. Sean $f(x,y) = \cos(xy)$, y además x e y funciones de variables u y v dadas por las siguientes fórmulas: $x(u,v) = u+v$, $y(u,v) = u-v$.

   Calcular
   $$\frac{\partial^2}{\partial u^2} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3}{\partial u \partial v^2} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$$

   (a) sustituyendo,

   (b) usando regla de la cadena.

Laplaciano - Función armónica

4. Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 satisface la ecuación de Laplace o bien que es una ***función armónica*** en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si:

   $$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \nabla^2 f \equiv 0 \text{ en } U$$

   Verificar que las siguientes funciones son armónicas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, que tendrá que determinar en cada caso.

   (a) $f(x,y,z) = x^2+y^2-2z^2$

   (b) $f(x,y,z) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

   (c) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

   (d) $f(x,y,z) = e^{3x+4}\cos(3z) + 4y$

5. Sean f, g funciones de clase C^2, definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Probar que f y g son armónicas en U.

Polinomio de Taylor

6. (*a*) Desarrollar la función $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ en potencias de $x - 2$;

   (*b*) Desarrollar la función $g(x) = \sqrt{x}$ en potencias de $x - 1$ hasta orden 3.

   (*c*) Hallar el polinomio de McLaurin de grado 3 para la función $f(x) = \ln(x+1)^2$.

   (*d*) Hallar el polinomio de McLaurin de grado 3 para la función $g(x) = e^{x+2}$.

7. (*a*) Hallar el polinomio de McLaurin de orden 2 y la expresión del resto para la función $f(x) = \sqrt{1+x}$.

   (*b*) Evaluar el error, que se comete al aproximar $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$, en $x = 0,2$.

8. (*a*) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado n de la función $y = (1+x)^\alpha$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (*b*) Aproximar el valor:

   i. $(1,3)^{2/3}$ con un error menor que $1/100$,

   ii. del número e con un error menor que 10^{-4},

   iii. $\ln \frac{2}{3}$ con un error menor que 10^{-3}.

9. Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado, y escribir la expresión del resto de Lagrange.

   (*a*) $f(x,y) = (x+y)^2$ en $(0,0)$

   (*b*) $f(x,y) = e^{x+y}$ en $(0,0)$

   (*c*) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$ en $(0,0)$

   (*d*) $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos(y)$ en $(1,0)$

   (*e*) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ en $(1,\pi)$

   (*f*) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y)$ en $(2, \frac{\pi}{4})$

   (*g*) $f(x,y) = \ln(1+xy)$ en $(2,3)$

   (*h*) $f(x,y) = x + xy + 2y$ en $(1,1)$

   (*i*) $f(x,y) = x^y$ en $(1,2)$

   (*j*) $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$ en $(2,3,4)$

10. Utilizando los resultados anteriores calcular $(0.95)^{2.01}$
    - (a) con error menor que $1/200$.
    - (b) con error menor que $1/5000$.

11. Sea $f(x, y) = xe^y$.
    - (a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f en el punto $(1, 0)$.
    - (b) Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0,98; 0,02)$. Luego, estimar el error cometido.

12. Mostrar que
$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$
para valores suficientemente pequeños de $|x|$ y de $|y|$.

13. (a) Calcular el polinomio de Taylor de grado 1 centrado en $(1, 1)$ de la función $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$.
    - (b) Utilizar el ítem anterior para aproximar el valor $e^{\frac{4}{10}}$ (notar que $\frac{4}{10} = (1 + \frac{1}{10})^2 - (1 - \frac{1}{10})^2$).
    Comprobar que el error cometido es menor que $0, 3$.

14. Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función
$$f(x, y) = \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y).$$

15. Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 alrededor del punto $(1, -1, 0)$ de la función
$$f(x, y, z) = \frac{\cos(x + y) \operatorname{sen}\left(\frac{yz}{x}\right)}{(2x + y)e^{z+(x^2-y^2)}}.$$

16. Sean $f(x, y) = (x + 1, 2y - e^x)$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, tales que el polinomio de Taylor de grado 2 de $g \circ f$ en $(0, 0)$ es $4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy$.
    Calcular $\nabla g(1, -1)$.

17. Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 en $(0, 0)$ de las funciones $f(x, y)$ dos veces diferenciables, que satisfacen la condición:
    - (a) $xf(x, y) + yf(x, y) = f(x, y) + 2$.
    - (b) $x\, f_y(x, y) = y\, f_x(x, y)$.
    - (c) $f_{yx}(x, y) = x + f_x(x, y)$.