

## Práctica 1: Preliminares

---

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

$$(a) |x + 3| < 1 \qquad (b) |3x - 1| < |x - 1| \qquad (c) |x - 3| \geq 1$$

$$(d) |x| > |x + 3| \qquad (e) \left| \frac{x - 2}{3x + 1} \right| \leq 1$$

2. Representar los siguientes conjuntos en la recta real:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < |2 - x|\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x^2 \leq x^3\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| + |x - 9| > 2\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} : ||x + 2| - |x - 1|| < 1\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1\}$$

3. Suponiendo que  $a \geq 0$  determinar para qué valores de  $b \in \mathbb{R}$  se verifican cada una de las siguientes condiciones:

$$(a) |a + b| = |a| + |b| \qquad (b) |a + b| < |a| + |b|$$

$$(c) |a - b| = |a| + |b| \qquad (d) |a - b| < |a| + |b|$$

$$(e) ||a| - |b|| = |a - b| \qquad (f) ||a| - |b|| < |a - b|$$

4. Decidir para qué valores reales de  $a$  y de  $b$  son válidas cada una de las siguientes afirmaciones:

$$(a) a < a^2 \qquad (b) a < b \Rightarrow a^2 < b^2$$

$$(c) a > 0 \Rightarrow ab \geq b \qquad (d) a + b \geq \max\{a, b\}$$

5. Sean  $0 \leq x \leq y$ . Probar que

$$x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2} \leq y.$$

6. (a) Demostrar que los siguientes conjuntos no son acotados superiormente:

- i.  $(0, +\infty)$
- ii.  $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = m^2\}$

(b) Demostrar que los siguientes conjuntos no son acotados inferiormente:

- i.  $\mathbb{Z}$
- ii.  $\{x^{-1} : x < 0\}$
- iii.  $\text{Im}(f)$ , para  $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ .

7. Hallar, si existen, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los siguientes conjuntos:

$$A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ y } 20 < n \leq 35\} \quad B = \{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$C = \{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\} \quad D = \{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$$

8. (a) Calcular el supremo del conjunto  $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\} \subset \mathbb{R}$ . Concluir que  $A$  no tiene máximo.

(b) Calcular el ínfimo del conjunto  $B = \{a \in \mathbb{Q}_{>0} : a^2 > 2\} \subset \mathbb{R}$ . Concluir que  $B$  no tiene mínimo.

9. Calcular

$$(a) \sup \{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\} \quad (b) \sup \{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$(c) \inf \{\frac{n-3}{2^n} : n \in \mathbb{N}\} \quad (d) \inf \{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}$$

10. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar la respuesta anterior con una demostración o un contraejemplo respectivamente.

(a) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \Rightarrow a_n > 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ).

(b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n > 0$  ( $\forall n \geq n_0$ ).

(c) Si  $a_n < 2$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) es una sucesión convergente  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 2$ .

(d) Si  $a_n < 2 - \frac{1}{n}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) es una sucesión convergente  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 2$ .

11. Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \ell$ .

Determinar, para cada  $\varepsilon > 0$  de la siguiente tabla, un valor  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  tal que  $|\frac{n+1}{n} - \ell| < \varepsilon$  si  $n > n_0$ .

$\varepsilon$	0,1	0,027	0,00001	$10^{-6}$
$n_0$				

12. Dadas las sucesiones

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Probar que:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$   
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ .

**Sugerencia:** Notar que  $a_n$  y  $b_n$  constan de  $n + 1$  términos. Usar el principio de comparación.

13. Sea  $a_n = \frac{4n-10}{n+1}$ .

- (a) Hallar un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se cumpla que  $3 < a_n < 5$ .  
 (b) Hallar, si existen,  $\max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  y  $\min\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

14. Sean  $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$  tales que  $a_0 > b_0 > 0$ , y  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones definidas recurrentemente por:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{y} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0).$$

Demostrar las siguientes afirmaciones:

- (a)  $a_n \geq b_n$  para todo natural  $n$ .  
 (b)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente y  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente.  
 (c)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  son sucesiones convergentes y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

15. Sea  $a_0$  un número positivo. Se define la siguiente sucesión dada por recurrencia:

$$a_{n+1} := \operatorname{sen}(a_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0).$$

Probar que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión convergente. Calcular su límite.

16. (a) Probar que  $\sum_{j=0}^n q^j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

(b) Calcular  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{7}{2^j}$  y  $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{3}{4^j}$ .

17. (a) Probar que  $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**Sugerencia:** Sumar, agrupando, el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, etc.

- (b) Sea  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  una sucesión de números naturales estrictamente creciente.  
Definimos

$$a_n := \frac{k_1 + \cdots + k_n}{k_n^2}.$$

Probar que  $\forall \varepsilon > 0$ , existe un  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se tiene que

$$a_n \leq 1/2 + \varepsilon.$$

### Métricas y Topología en $\mathbb{R}^n$

18. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones en  $\mathbb{R}^2$ . Representar las soluciones en el plano.

- |   |   |
|---|---|
| a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \leq 2\}$       | b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :  x - y  > 2\}$              |
| c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$     | d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$            |
| e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :  x  +  y  < 3\}$        | f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :  x - 2  +  y + 1  \geq 1\}$ |
| g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{ x ;  y \} = 1\}$ | h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{ x ;  y \} < 1\}$     |

19. Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , se define  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  y  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$ .

Mostrar que si  $x \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que

- (a)  $|x_i| \leq \|x\|_2$ , si  $i = 1, \dots, n$ ;  
 (b)  $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$ ;  
 (c)  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$ . Describir geoméricamente esta doble desigualdad.

20. Representar gráficamente los siguientes conjuntos  $A$ .

- (a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + (y - 1)^2 \leq 3\}$   
 (b)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < 5x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, |y| \leq \sqrt{5}\}$   
 (c)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \frac{y^2}{4} < 1\}$   
 (d)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge x^2 + y^2 + (z + 1)^2 < 1\}$ ;  
 (e)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 > 1/2\}$ .

21. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  son abiertos, cerrados y/o acotados:

- (a)  $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ ;

- (b)  $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;
- (c)  $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$ ;
- (d)  $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ ;
- (e)  $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$ .

22. Calcular  $\partial A$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{A} \setminus A$  y  $A \setminus \partial A$  para los conjuntos  $A$  que aparecen en el Ejercicio 21.

(Recordar que los símbolos significan:  $\partial A$  =borde de  $A$ ,  $\bar{A}$  =clausura de  $A$ , y  $\setminus$  =resta, en este caso de conjuntos.)