

1	2	3	4	5	6	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA:

CARRERA:

## Álgebra I

### RECUPERATORIO DEL PREFINAL (27/03/2014)

#### PARTE 1:

1. Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$  el conjunto de los números naturales pares. Se define la siguiente relación  $\mathcal{R}$  en el conjunto  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  de partes de  $\mathbb{N}$ :

$$A \mathcal{R} B \iff (A \cap B) \cup (A' \cap B') \subseteq \mathcal{P}.$$

- a) Analizar si  $\emptyset \mathcal{R} \mathbb{N}$ ,  $\emptyset \mathcal{R} \mathcal{I}$  y  $\mathbb{N} \mathcal{R} \mathcal{I}$ , donde  $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$  es el conjunto de los números impares.  
b) Analizar si  $\mathcal{R}$  es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

2. Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida recursivamente por

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3 \quad \text{y} \quad a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

Hallar una fórmula cerrada para  $a_n$  y probarla.

3. Probar que no existen  $x, y \in \mathbb{Q}$  que satisfacen la relación  $x^2 + y^2 = 3$ .

#### PARTE 2:

1. Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  tales que

$$2^n \equiv 38^n \pmod{70}.$$

2. Sea  $\omega \in \mathbb{C}$  una raíz primitiva de la unidad de orden 10. Calcular

$$(\omega - 1) \cdot \left( \omega^{104} + \bar{\omega}^3 + \omega^{-9} + \frac{1}{\omega^8} + |\omega| \right).$$

3. Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}[X]$  la sucesión de polinomios definida recursivamente por

$$\begin{cases} f_1 &= X^4 - 7X^3 + 18X^2 - 20X + 8, \\ f_{n+1} &= (X + 1)f_n(X)^2 + X^5 - 6X^4 + 13X^3 - 14X^2 + 12X - 8, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , 2 es raíz de  $f_n$  de multiplicidad exactamente 3.

**Para aprobar es necesario tener por lo menos 1 ejercicio de cada parte Bien.**