1	2	3	4	5	6	Calificación

Apellido y Nombre:

No. de libreta: Carrera:

Álgebra I

Recuperatorio del Prefinal (20/03/2014)

Parte 1:

1. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(X)$ en la forma
$$A\,\mathcal{R}\,B \iff A \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = B \cup \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$
   a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y describir por comprensión la clase $\overline{A}$ de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   b) ¿Cuántos elementos tiene la clase $\overline{A}$ de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por
$$a_1 = 1\ , \quad (n^2 - 2n + 1)a_{n-1} = (n^2 - 1)a_n,\ \forall\, n \geq 2.$$
   Hallar una fórmula cerrada para a_n y probarla.

3. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 5$.
   a) Calcular los posibles valores de $(ab : 5a - 10b)$ y dar un ejemplo para cada uno de ellos.
   b) Caracterizar para qué $a, b \in \mathbb{Z}$ el máximo común divisor da cada uno de los valores hallados.

Parte 2:

1. Hallar todos los primos positivos p tales que
$$3^p + 7^{p-1} \equiv -25(p).$$

2. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raiz primitiva de la unidad de orden 91. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que
$$\begin{cases} \omega^{14n} &= \omega^7 \\ \omega^{39n} &= \omega^{26}. \end{cases}$$

3. *a*) Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales el polinomio $f = X^6 + aX^3 + 1$ tiene raíces complejas múltiples.
   b) Para cada $a \in \mathbb{R}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$.

Para aprobar es necesario tener por lo menos 1 ejercicio de cada parte Bien.