PRÁCTICA 6

NÚMEROS COMPLEJOS Y POLINOMIOS

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

NÚMEROS COMPLEJOS

El conjunto $\mathbb{C}$ de los *números complejos* es:

$$\mathbb{C} = \{\ z = a + bi\ /\ a, b \in \mathbb{R}\ ;\ i^2 = -1\}$$

Si $z \in \mathbb{C}$, la representación $a + bi$ se llama *forma binómica* de z.

La *parte real* de z es a: $\qquad \operatorname{Re} z = a.$

La *parte imaginaria* de z es b: $\qquad \operatorname{Im} z = b.$

Si $z, w \in \mathbb{C} \qquad z = w \iff \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$ e $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos;

la suma es $\qquad z + w = (a + c) + (b + d)i$

el producto es $\qquad z\,w = (ac - bd) + (ad + bc)i$

La suma es asociativa y conmutativa; el producto es asociativo y conmutativo y vale la propiedad distributiva respecto de la suma.

Notación: $\qquad a + (-b)i = a - bi \qquad a + 0i = a \qquad 0 + bi = bi$

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, llamaremos *conjugado* de z a $\quad \overline{z} = a - bi$

y llamaremos *módulo de z* al número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Observaciones $\qquad$ 1) $|z|^2 = z\,\overline{z}$ $\qquad$ 2) Si $z \neq 0,\ z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Propiedades:

C1) $\overline{\overline{z}} = z$

C2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

C3) $\overline{z\,w} = \overline{z}\,\overline{w}$

C4) Si $z \neq 0,\ \overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$

C5) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$

C6) $z - \overline{z} = 2(\operatorname{Im} z)i$

M1) $z = 0 \iff |z| = 0$

M2) $|z\,w| = |z||w|$

M3) $|z| = |\overline{z}|$

M4) $|z| = |-z|$

M5) Si $z \neq 0 \Rightarrow |z^{-1}| = |z|^{-1}$

M6) Si $w \neq 0 \Rightarrow \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi, z \neq 0$, llamaremos *argumento de z* al único número real $\arg z$ tal que $$0 \leq \arg z < 2\pi \quad ; \quad \cos \arg z = \frac{a}{|z|} \quad ; \quad \operatorname{sen} \arg z = \frac{b}{|z|}$$

Si $z \in \mathbb{C}$, la *forma trigonométrica de z* es $\quad z = |z|(\cos \arg z + i \operatorname{sen} \arg z)$

Si $z = \rho(\cos \alpha + i\operatorname{sen} \alpha)$ y $w = \tau(\cos \beta + i\operatorname{sen} \beta)$, con $\rho, \tau > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$z = w \Leftrightarrow \rho = \tau \text{ (es decir } |z| = |w|) \text{ y } \alpha = \beta + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema de De Moivre. Sean $z, w \in \mathbb{C}, z \neq 0, w \neq 0$.

Si $z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ y $w = |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ entonces

$$z\,w = |z||w|(\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta))$$

Corolario.

$$z^{-1} = |z|^{-1}(\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha))$$
$$\overline{z} = |z| \cdot (\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha))$$
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$$
$$z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Si $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$, una *raíz n-ésima* de w es un número $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = w$.

Propiedad. Si z es una raíz n-ésima de w entonces:

$$z = |w|^{1/n}(\cos \frac{\arg w + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg w + 2k\pi}{n})$$

para algún entero k tal que $0 \leq k \leq n - 1$.

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$, la *notación exponencial de z* es $\quad z = |z| e^{i\alpha}$

Propiedades. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\overline{e^{i\alpha}} = e^{\overline{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$$
$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha + \beta)}$$

EJERCICIOS

NÚMEROS COMPLEJOS

Ejercicio 1.- Dar la forma binómica de z.

a) $z=(3-i)+(\frac{1}{5}+5i)$ b) $z=(\sqrt{2}+i)(\sqrt{3}-i)$ c) $z=(3+\frac{1}{3}i)(3-\frac{1}{3}i)+(3+2i)$

Ejercicio 2.- Dar la forma binómica de z.

a) $z=(1+2i)(1-2i)^{-1}$ b) $z=(1+i)(2+3i)\overline{(3+2i)}$

c) $z=(1+i)^{-1}(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)+(-2+5i)$

Ejercicio 3.- Calcular $|z|$.

a) $z=(\sqrt{2}+i)+(3\sqrt{2}-3i)$ b) $z=(1+ai)(1-ai)^{-1}$ $a\in\mathbb{R}$

c) $z=(3i)^{-1}$ d) $z=\big||1-i|+i\big|+i$

e) $z=(1+i)(1-2i)(3-i)$ f) $z=3(1+3i)^{10}$

Ejercicio 4.- Dar la forma binómica de $\overline{z}$.

a) $z=|1-i|+i$ b) $z=\big||1+i|+i\big|+i$

c) $z=(1-2i)(2-i)$ d) $z=(1+3i)(1-3i)$

Ejercicio 5.- Representar en el plano todos los $z\in\mathbb{C}$ tales que:

a) $|z|=3$ b) $|z|\le 2$ c) $z=\overline{z}$

Ejercicio 6.-

a) Representar en el plano el conjunto $B=\{z\in\mathbb{C}/|z+1-i|\le 2\}$.

b) Representar en el plano el conjunto $B=\{z\in\mathbb{C}/|z+1|\le|z-3-i|\}$.

c) Si $A=\{z\in\mathbb{C}/\operatorname{Re}z\le 1,\ \operatorname{Im}z\le\frac{1}{2}\}$ y $B=\{z\in\mathbb{C}/|z-1-3i|=5\}$, representar $C=A\cap B$.

Ejercicio 7.- Escribir en forma binómica todos los $z\in\mathbb{C}$ tales que:

a) $z^2=1-4\sqrt{3}i$ b) $z^2=16+14\sqrt{3}i$

c) $z^2+2z+3=0$ d) $z^2=5-2iz$

Ejercicio 8.- Hallar todos los $z\in\mathbb{C}$ tales que su conjugado coincide con su cuadrado.

Ejercicio 9.- Calcular $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$.

a) $z = 2(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$

b) $z = 3(\cos \frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi)$

c) $z = (\cos \frac{2}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi)$

d) $z = 2(\cos \frac{7}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{7}{4}\pi)$

Ejercicio 10.- Escribir z en forma trigonométrica.

a) $z = \sqrt{5}$

b) $z = -6$

c) $z = 15i$

d) $z = -\frac{1}{3}i$

e) $z = \sqrt{5} + \sqrt{5}i$

f) $z = 3 - \sqrt{3}i$

g) $z = -3(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

h) $z = 3(\cos \frac{\pi}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2})$

i) $z = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3})$

j) $z = \frac{\pi}{2} i(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2})$

Ejercicio 11.- Representar en el plano.

a) $A = \{z \in \mathbb{C} / \arg z = 0\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C} / \frac{1}{2}\pi \leq \arg z \leq \frac{5}{4}\pi\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 5,\ 0 \leq \arg z \leq \frac{2}{3}\pi\}$

d) $C = \{z \in \mathbb{C} / |z + 1 - i| \leq 3,\ \frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}\}$

Ejercicio 12.-

a) Escribir en forma trigonométrica $z = (1+i)(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$

b) Escribir en forma binómica $z = (-3\sqrt{3} + 3i)^{15}$

c) Escribir en forma binómica $z = \dfrac{1+i}{(-\sqrt{3}+i)^5}$

Ejercicio 13.- Encontrar todas las raíces n-ésimas de w para:

a) $n = 3 \quad w = 1$

b) $n = 5 \quad w = -3$

c) $n = 4 \quad w = -1 - \sqrt{3}i$

Ejercicio 14.- Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^8 = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$

Ejercicio 15.- Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

a) $z^3 = i\bar{z}^2$

b) $z^{10} = -4\bar{z}^{10}$

c) $z^5 - \bar{z} = 0$

d) $z^4 + z^{-4} = 0$

e) $z^3 + 9i\bar{z}^2 |z| = 0$

f) $z^4 = (\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^8$

Ejercicio 16.-

a) Escribir en forma binómica $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2e^{-i\pi}$, $e^{i\frac{5}{6}\pi}$.

b) Expresar en forma exponencial las raíces quintas de -1.

c) Probar que $\forall t \in \mathbb{R}$ es $\cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ y $\operatorname{sen} t = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que:

a) $z^3 = 3iz\overline{z}$ b) $(1+\sqrt{3}i)z^3 = 2\overline{z}$

2. Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, tal que $|z|=1$. Calcular $\operatorname{Im}(i\dfrac{1+z}{1-z}) = 0$.

8. a) Hallar todas las raíces sextas de $(1 + i)$

b) ¿Existe una raíz sexta de $(1 + i)$ cuyo conjugado sea también raíz sexta de $(1 + i)$?

c) Hallar el producto de todas las raíces sextas de $1 + i$.

11. Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^7\overline{z}^3 = -2^{10}i$.

12. Hallar z_1 y z_2 tales que ambos sean soluciones de $(1-i)z^2 = (2+2i)\overline{z}$ y que además verifiquen $\operatorname{Re}(z_1) < 0$; $\operatorname{Im}(z_1 \cdot \overline{z}_2) > 0$.

15. Graficar los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^4 = (\overline{z})^4$ y $|\operatorname{Re}(z)| < 1$.

16. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^6 = i(\overline{z})^{-4}$ e $\operatorname{Im}(z^3) < 0$.