Álgebra I
Práctica 2 - Números Naturales e Inducción

Sumatoria

1. i) Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

(a) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$,
(b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$,
(c) $1 + (-4) + 9 + (-16) + 25 + \cdots + (-144)$,
(d) $1 + 9 + 25 + 49 + \cdots + 441$,
(e) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1)$,
(f) $n + 2n + 3n + \cdots + n^2$.

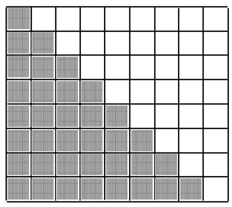
ii) Reescribir cada una de los siguientes productos usando el símbolo de productoria y/o de factorial

(a) $5 \cdot 6 \cdots 99 \cdot 100$, (b) $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdots 1024$, (c) $n \cdot 2n \cdot 3n \cdots n^2$.

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las expresiones siguientes

i) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$, ii) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$, iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$, iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$, v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3}$.

3. i) Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ contando de dos maneras la cantidad de cuadraditos sombreados del diagrama



ii) Deducir que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$.

4. Calcular

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (4i+1)$, ii) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$.

5. Calcular

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i$,

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} q^i$, $q \in \mathbb{R}$,

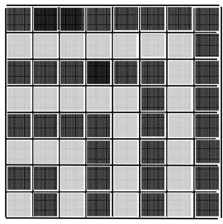
iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^{2i}$, $q \in \mathbb{R}$,

iv) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} q^i$, $q \in \mathbb{R}$.

Inducción

6. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$:

i) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama



ii) usando el ejercicio 3,

iii) usando el principio de inducción.

7. *(Suma de cuadrados y de cubos)* Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

8. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, i^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$,

ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{-1}{4i^2-1} = \frac{n+1}{2n+1}$,

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i+1)\, 3^{i-1} = n\, 3^n$,

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i\, 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$,

v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$.

9. Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^{i-1} b^{n-i}$. Deducir la fórmula de la serie geométrica: para todo $a \neq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

10. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$.

ii) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\displaystyle\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$),

iii) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\displaystyle\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}$).

11. Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i i}{(2i-1)(2i+1)}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

12. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $n < 2^n$,

ii) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$,

iii) $3^n \geq n^3$,

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$,

v) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$,

vi) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$.

vii) $n! \geq \dfrac{3^{n-1}}{2}$,

viii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

13. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.
¿En qué paso de la demostración se usa que $a \geq -1$?

14. Probar que

i) $n! \geq 3^{n-1}$, $\forall\, n \geq 5$,

ii) $3^n - 2^n > n^3$, $\forall\, n \geq 4$,

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n - 5$, $\forall\, n \geq 3$,

15. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que

i) la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$,

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi\,(n-2)$.

<u>*Recurrencia*</u>

16. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2\,n\,a_n + 2^{n+1} n!, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n\, n!$.

iii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = a_n + n(3n+1), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

17. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

ii) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iii) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = n\, a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iv) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

18. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n^3$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

ii) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1} n^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iii) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + (2n+1)3^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(Sugerencia: usar los Ejercicios 10(i), 7 y 8.)

19. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n \cdot n!, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n!$, y, aplicando el Ej. 10(i), calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot i!$

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n^3$, y, aplicando el Ej. 10(i), calcular de otra manera $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ (c.f. Ej. 7).

20. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = n\,a_{n+1} + 2(n+1)a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

ii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad 2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3n + 5,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iv) $a_1 = -3, \quad a_2 = 6, \quad a_{n+2} = \begin{cases} -a_{n+1} - 3 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ a_{n+1} + 2a_n + 9 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$

21. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_0 = 2, \quad a_1 = 4, \quad a_{n+2} = 4\,a_{n+1} - 3\,a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

ii) $a_0 = 1, \quad a_1 = 4, \quad a_{n+2} = 4\,a_{n+1} - 3\,a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

iii) $a_0 = 1, \quad a_1 = 4, \quad a_{n+2} = 4\,a_{n+1} - 4\,a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

22. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2}\,a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n > n + \dfrac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

23. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\,a_i,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

ii) $a_1 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\Big),\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iii) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \ + (n+1),\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

24. Probar que todo número natural n se escribe como suma de distintas potencias de 2, incluyendo $2^0 = 1$ (sugerencia: considerar la mayor potencia de 2 menor o igual a n).

Número combinatorio

25. Probar que $\dbinom{2n}{n} > n\,2^n,\ \forall\, n \geq 4.$

26. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 4a_n - 2\frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = \dbinom{2n}{n}$.

27. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\,a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

i) Probar que $a_n \leq \dfrac{1}{2n}\dbinom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Probar que $a_n > \dfrac{1}{3^{n-1}}\dbinom{2n}{n}$ para todo $n \geq 3$.

28. i) ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

ii) ¿Y si se pide que 1 pertenezca al subconjunto?

iii) ¿Y si se pide que 1 no pertenezca al subconjunto?

iv) ¿Y si se pide que 1 ó 2 pertenezcan al subconjunto, pero no simultaneamente los dos?

29. Dadas dos rectas paralelas en el plano, se marcan n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra, ¿cuántos triángulos se pueden formar con vértices en esos puntos?

30. i) Sea A un conjunto con $2n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?

ii) Sea A un conjunto con $3n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?

31. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 10\}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia en $\mathcal{P}(X)$ definida en el Ejercicio 51 de la Práctica 1:

$$A \,\mathcal{R}\, B \iff A \cap \{1, 2, 3\} = B \cap \{1, 2, 3\}.$$

¿Cuántos conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$ de exactamente 5 elementos tiene la clase de equivalencia $\overline{A}$ de $A = \{1, 3, 5\}$?

32. Sea $X = \{1, 2, \dots, 20\}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación de orden en $\mathcal{P}(X)$ definida en el Ejercicio 52 de la Práctica 1:

$$A \,\mathcal{R}\, B \iff A - B = \emptyset$$

¿Cuántos conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ cumplen simultáneamente $\#A = 6$ y $A \,\mathcal{R}\, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

33. En este ejercicio no hace falta usar inducción: se puede pensar en el significado combinatorio de $\binom{n}{k}$ (como la cantidad de subconjuntos de k elementos en un conjunto de n elementos).

i) Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$ y deducir que $\dbinom{2n}{n} < 4^n$.

ii) Calcular $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

iii) Probar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$ $\left(\text{sug: } k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}\right)$.

iv) Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ $\left(\text{sug: } \dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}\right)$.

34. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ (sug: no hace falta usar inducción, aplicar el binomio de Newton).

35. Derivar a izquierda y derecha la igualdad $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ y evaluar lo obtenido en $x = 1$. ¿Qué se obtiene? (Comparar con el Ej. 33(iii).)

Complejidad

36. Cálculo de a^n para un número a dado y $n \in \mathbb{N}$

Se asume un modelo ideal donde dados dos números b y c, se puede calcular $b \cdot c$ exactamente realizando una sola operación.

i) Algoritmo recursivo *secuencial*: Calcular las distintas potencias de a mediante

$$a^{k+1} = a \cdot a^k, \ \forall\, k \geq 1$$

Calcular a^8, a^{11} y a^{15} mediante ese algoritmo. ¿Cuántas operaciones se realizaron para calcularlos? ¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^n?

ii) Algoritmo recursivo *dividir y conquistar*:

- Para n una potencia de 2, calcular a^n mediante

$$a^{2^1} = a \cdot a \quad , \quad a^{2^{k+1}} = a^{2 \cdot 2^k} = a^{2^k + 2^k} = a^{2^k} \cdot a^{2^k}, \ \forall\, k \geq 1.$$

Calcular a^8 mediante ese algoritmo. ¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^8? ¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^{2^k}?

- Para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, escribir n como suma de potencias de 2 (ver Ejercicio 24) y luego calcular a^n por multiplicación. Por ejemplo si $n = 11 = 1 + 2 + 2^3$, se obtiene

$$a^n = a^{1+2+2^3} = a \cdot a^2 \cdot a^{2^3}.$$

¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^{11}?
Calcular a^{15} mediante ese algoritmo. ¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^{15}?

37. Un algoritmos de ordenación de datos: burbujeo

Dada una lista ordenada $(a(1), \ldots, a(n))$ de n números reales, se la quiere ordenar de menor a mayor. Por ejemplo dada la lista $(4, 3, 5, 7, 2, 9, 1, 8)$ se quiere obtener la lista $(1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9)$ haciendo comparaciones entre elementos ¿$a(i) < a(j)$? y en función de la respuesta intercambiando si necesario los elementos comparados.

El algoritmo siguiente, llamado "burbujeo", compara el 1er elemento de la lista con el 2do intercambiándolos si necesario, luego pasa al 2do y hace lo mismo con el siguiente, luego al 3ro etc. hasta recorrer todos los elementos de la lista (una pasada). En una pasada por todos los elementos de la lista, el elemento más grande quedará entonces a la derecha ¿Por qué? Luego repite el procedimiento desde el comienzo hasta no haber producido ningún cambio en una pasada. En ese punto la lista estará ordenada ¿Por qué?

Por ejemplo la primera pasada del ejemplo de arriba da:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccc}
\underline{4} & \underline{3} & 5 & 7 & 2 & 9 & 1 & 8 & \rightarrow & 3 & \underline{4} & \underline{5} & 7 & 2 & 9 & 1 & 8 & \rightarrow & 3 & 4 & \underline{5} & \underline{7} & 2 & 9 & 1 & 8 & \rightarrow \\
3 & 4 & 5 & \underline{7} & \underline{2} & 9 & 1 & 8 & \rightarrow & 3 & 4 & 5 & 2 & \underline{7} & \underline{9} & 1 & 8 & \rightarrow & 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & \underline{9} & \underline{1} & 8 & \rightarrow \\
3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & \underline{9} & \underline{8} & \rightarrow & 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & 8 & 9 & & & & & & & & &
\end{array}$$

i) ¿Cuántas comparaciones se usan en la primera pasada de esa lista? ¿Y en la segunda? ¿Cuántas comparaciones son necesarias para ordenar esa lista?

ii) ¿Cuántas comparaciones se usan en la primera pasada de una lista de n elementos? ¿Y en la segunda?

iii) ¿Cuántas comparaciones son necesarias para ordenar una lista de n elementos?