

Álgebra I

Práctica 1 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

Conjuntos

Si A es un subconjunto de un conjunto referencial V , denotaremos por A' al complemento de A respecto de V .

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

- i) $1 \in A$ ii) $\{1\} \subseteq A$ iii) $\{2, 1\} \subseteq A$ iv) $\{1, 3\} \in A$ v) $\{2\} \in A$

2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- i) $3 \in A$ iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$ vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$ x) $\emptyset \subseteq A$
 ii) $\{3\} \subseteq A$ v) $\{1, 2\} \in A$ viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$ xi) $A \in A$
 iii) $\{3\} \in A$ vi) $\{1, 2\} \subseteq A$ ix) $\emptyset \in A$ xii) $A \subseteq A$

3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos

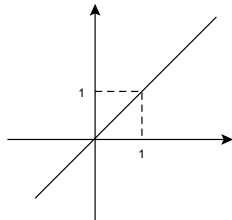
- i) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$
 ii) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$
 iii) $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 < |x| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 3\}$
 iv) $A = \{\emptyset\}$, $B = \emptyset$

4. i) Describir a los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} por comprensión mediante *una sola* ecuación:

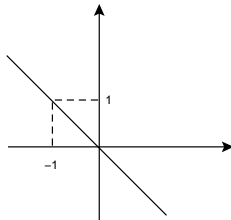
$$\{-3, 1, 5\} \quad , \quad (-\infty, 2] \cup [7, +\infty)$$

ii) Describir a los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 por comprensión mediante *una sola* ecuación:

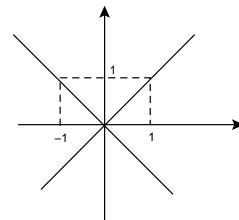
i)



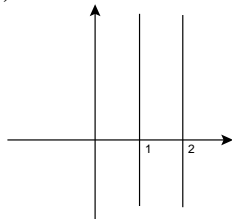
ii)



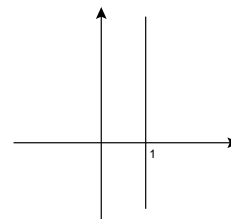
iii)



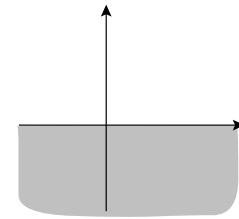
iv)



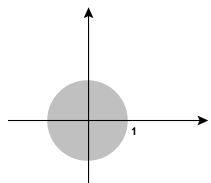
v)



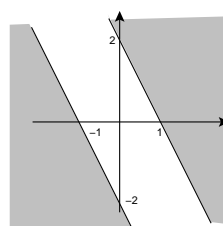
vi)



vii)



(* viii)

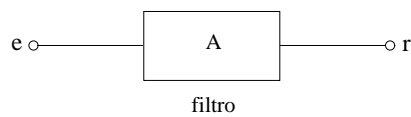


- i) $(A \Delta B) - C = (A - C) \Delta (B - C)$
- ii) $A \Delta B \subseteq (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$
- iii) $C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \Delta B)'$
- iv) $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

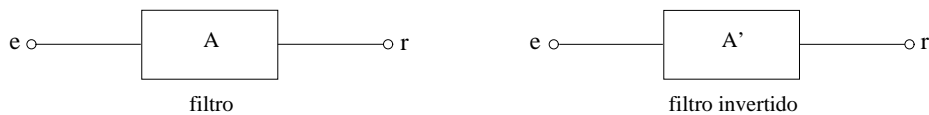
15. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V . Probar que

- i) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
- ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
- iii) $A - (A \Delta B) = A \cap B$
- iv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$
- v) $A \subseteq B \Rightarrow A \Delta B = B \cap A'$
- vi) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$
- vii) $C \subseteq A \Rightarrow (A \cup B) \cap C' = (B - C) \cup (A \Delta C)$
- viii) $A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap (B \Delta C) = A \cap B$

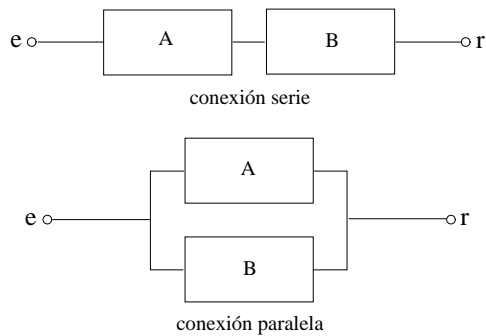
16. Un emisor e envía señales de diferentes frecuencias a un receptor r a través de un cable conductor. Se dispone de filtros que dejan pasar a unas señales sí y a otras no, dependiendo de sus frecuencias.



Cada uno de estos filtros tiene una llave que al accionarla invierte el espectro de frecuencias que el filtro deja pasar.



Los filtros pueden conectarse en serie o en paralelo para formar nuevos filtros.



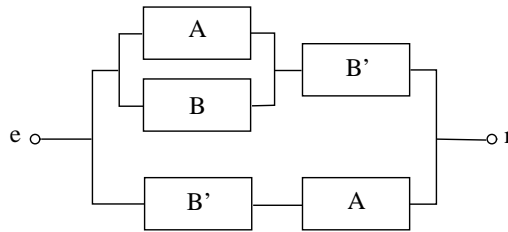
Se considera ahora en el conjunto de todas las frecuencias y se identifica a cada filtro con el subconjunto formado por aquellas frecuencias que éste deja pasar. Observar que con la identificación recién establecida, se tienen las siguientes correspondencias:

Filtro invertido \leftrightarrow Complemento , Conexión serie \leftrightarrow Intersección , Conexión paralela \leftrightarrow Unión

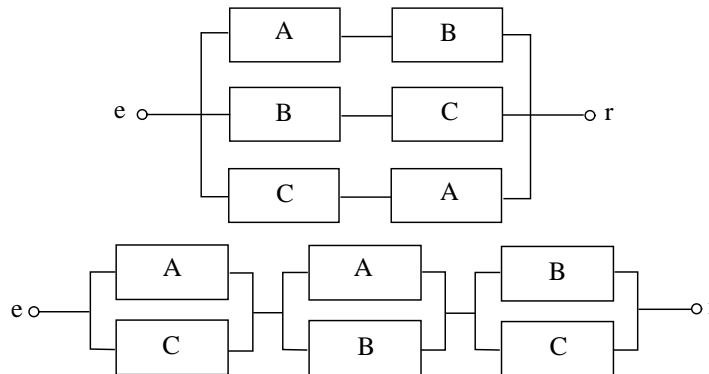
- i) Diseñar circuitos para la construcción de los siguientes filtros a partir de los filtros A, B y C
 - (a) $(A \cup B)'$
 - (b) $(A \cap B)'$
 - (c) $A \cup (B \cap C)$
 - (d) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
 - (e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
 - (f) $A \Delta B$
- ii) Diseñar circuitos para la construcción de los siguientes filtros a partir de los filtros A, B, C, D
 - (a) $(D \Delta (A \cap B)) - C$
 - (b) $((D \cap A) \Delta (D \cap B')) \cup (A \cap B' \cap (C - D))$

(c) $(A' \cap B \cap C) \Delta (D' \cap C)$

- iii) Rediseñar el siguiente circuito construyendo otro equivalente pero que utilice únicamente dos filtros. ¿A qué conjunto corresponde el filtro resultante?



- iv) ¿Son los siguientes circuitos equivalentes? En caso afirmativo escribir la identidad de conjuntos que resulta y demostrarla.



17. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A$, $A \times B$, $(A \cap B) \times (A \cup B)$.

18. Sean A , B y C conjuntos. Probar que

- | | |
|--|--|
| i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ | iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$ |
| ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ | iv) $(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$ |

Relaciones

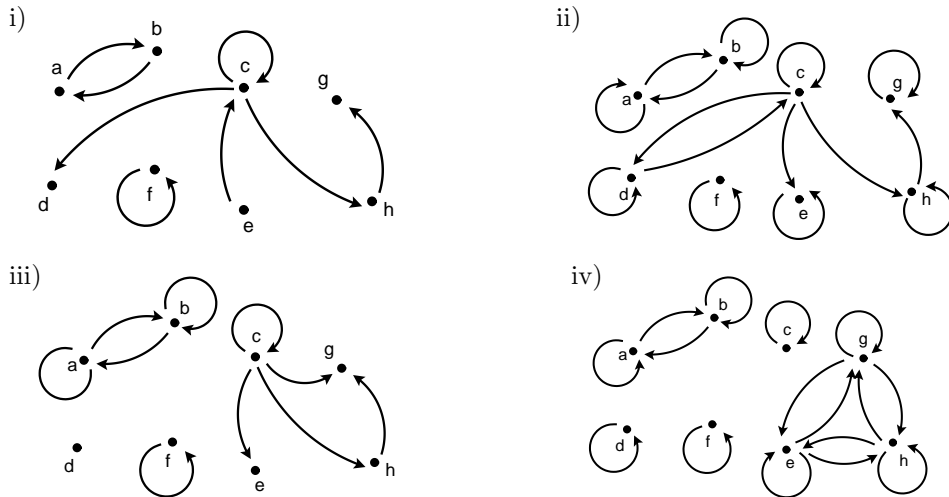
19. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Verificar si las siguientes son relaciones de A en B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B , y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

- | | |
|--|--|
| i) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (3, 1), (3, 5)\}$ | v) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 7), (3, 7)\}$ |
| ii) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 2), (3, 5)\}$ | vi) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 7)\}$ |
| iii) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 3), (3, 5)\}$ | vii) $\mathcal{R} = \emptyset$ |
| iv) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 7)\}$ | viii) $\mathcal{R} = A \times B$ |

20. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Describir por extensión cada una de las relaciones siguientes de A en B :

- | | |
|---|---|
| i) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b$ | iii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b$ es par |
| ii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a > b$ | iv) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6$ |

21. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

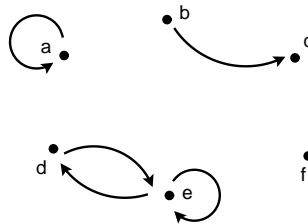


22. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graficar la relación

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (6, 4), (4, 6), (4, 4), (6, 6)\}$$

como está hecho en el ejercicio anterior.

23. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea \mathcal{R} la relación en A representada por el gráfico



Hallar la mínima cantidad de pares que se deben agregar a \mathcal{R} de manera que la nueva relación obtenida sea

- i) reflexiva,
- ii) simétrica,
- iii) transitiva,
- iv) reflexiva y simétrica,
- v) simétrica y transitiva,
- vi) reflexiva y transitiva,
- vii) de equivalencia.

24. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación \mathcal{R} en A es reflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

- i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
- ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
- iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$
- iv) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / a + b \text{ es par}\}$
- v) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / |a| \leq |b|\}$
- vi) $A = \mathbb{N}$, \mathcal{R} definida por $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow b$ es múltiplo de a
- vii) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, \mathcal{R} definida por $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$

25. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez

- i) simétricas y antisimétricas
- ii) de equivalencia y de orden

¿Puede una relación en A no ser ni simétrica ni antisimétrica?

26. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A :

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (b, a), (a, f), (f, a), (b, f), (f, b), (c, e), (e, c)\}$$

hallar la clase \bar{a} de a , la clase \bar{b} de b , la clase \bar{c} de c , la clase \bar{d} de d , y la partición asociada a \mathcal{R} .

27. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\{\{1, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 8, 9, 10\}, \{5\}\}$. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.
28. En el conjunto \mathbb{Z} de números enteros, sea la relación de equivalencia dada por la paridad: dos números están relacionados si y solo si tienen la misma paridad (son ambos pares o ambos impares). ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.
29. En el conjunto \mathbb{Z} de números enteros, sea la siguiente relación: dos números están relacionados si terminan en el mismo dígito. Verificar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.
30. En el conjunto de todos los subconjuntos finitos de \mathbb{N} , sea la relación de equivalencia dada por el cardinal (es decir, la cantidad de elementos): dos subconjuntos están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.

Funciones

31. Determinar qué relaciones del ejercicio 19 son funciones de A en B , y qué relaciones del ejercicio 24 son funciones de A en A .
32. Determinar si \mathcal{R} es una función de A en B en los casos
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$
 - $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$
 - $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} / a = 2b - 3\}$
 - $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / a + b \text{ es divisible por } 5\}$
33. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 12x^2 - 5$
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 12x^3 - 5$
 - $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (2x, x^2, x - 7)$
 - $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$
 - $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$
 - $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(a, b) = 3a - 2b$
 - $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } a > 0 \\ 1 - 2a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$
34. i) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6 \\ 3n + 1 & \text{en los otros casos} \end{cases} \quad \text{y } g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(n, m) = n(m+1),$$

calcular $(f \circ g)(3, 4)$, $(f \circ g)(2, 5)$ y $(f \circ g)(3, 2)$.

ii) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 7 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 7 \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, g(n) = \sqrt{n},$$

hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(f \circ g)(n) = 13$ y tales que $(f \circ g)(n) = 15$.

35. Hallar $f \circ g$ en los casos

i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 18$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 3$

ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 3$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x^2 - 18$

iii) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} n - 2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4 \\ n + 1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4 \end{cases}$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(n) = 4n$

iv) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = (x + 5, 3x)$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, g(n) = \sqrt{n}$

36. Hallar dos funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tales que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ f \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$, donde $\text{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ denota la función identidad del conjunto \mathbb{N} .

37. Sean A, B y C conjuntos. Probar que si $f : B \rightarrow C$ y $g : A \rightarrow B$ son funciones entonces valen

i) si $f \circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.

ii) si $f \circ g$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva

iii) si f y g son inyectivas entonces $f \circ g$ es inyectiva

iv) si f y g son sobreyectivas entonces $f \circ g$ es sobreyectiva

v) si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva

38. Sea B el conjunto de todos los *bytes*, es decir de todas las expresiones de la forma

$$b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0,$$

donde $b_i = 0$ o 1 , $0 \leq i \leq 7$, es lo que se llama un *bit*. Por ejemplo 10100110 y 00000001 son bytes.

Se consideran las siguientes funciones de B en B :

i) R (por *right*): desplaza cada bit un lugar hacia la derecha, pone un 0 en el bit 7 y descarta el bit 0. Por ejemplo $R(10100110) = 01010011$ y $R(00000001) = 00000000$.

ii) L (por *left*): desplaza cada bit un lugar hacia la izquierda, pone un 0 en el bit 0 y descarta el bit 7. Por ejemplo $L(10100110) = 01001100$ y $L(00000001) = 00000010$.

iii) A_b (por *and*) efectúa un ‘y’ lógico (\wedge) bit a bit con un byte $b \in B$ dado ($0 \wedge 0 = 0$, $0 \wedge 1 = 0$, $1 \wedge 0 = 0$, $1 \wedge 1 = 1$). Por ejemplo si $b = 11110001$, $A_b(10100110) = 10100000$ y $A_b(00000001) = 00000001$.

iv) O_b (por *or*) efectúa un ‘o lógico’ (\vee) bit a bit con un byte $b \in B$ dado ($0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1$, $1 \vee 0 = 1$, $1 \vee 1 = 1$). Por ejemplo si $b = 11110001$, $O_b(10100110) = 11110111$ y $O_b(00000001) = 11110001$.

v) X_b (por *xor*) efectúa un ‘o lógico exclusivo’ (\veebar) bit a bit con un byte $b \in B$ dado ($0 \veebar 0 = 0$, $0 \veebar 1 = 1$, $1 \veebar 0 = 1$, $1 \veebar 1 = 0$). Por ejemplo si $b = 11110001$, $X_b(10100110) = 01010111$ y $X_b(00000001) = 11110000$.

Calcular $R \circ L$, $L \circ R$, y dado $b \in B$, $A_b \circ A_b$, $A_b \circ O_b$, $O_b \circ A_b$, $X_b \circ X_b$. Una sola de estas funciones es biyectiva: descubrir cuál y encontrar su inversa.

Combinatoria de conjuntos, relaciones y funciones.

39. Si un conjunto tiene n elementos ¿cuántos subconjuntos con 1 elemento posee y cuántos subconjuntos con $n - 1$ elementos posee?

40. Dado el conjunto referencial $V = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ es múltiplo de } 15\}$, determinar el cardinal del complemento del subconjunto A de V definido por $A = \{n \in V / n \geq 132\}$.
41. ¿Cuántos números naturales hay menores o iguales que 1000 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?
42. Dados subconjuntos finitos A, B, C de un conjunto referencial V , calcular $\#(A \cup B \cup C)$ en términos de los cardinales de A, B, C y sus intersecciones.
43. i) Una compañía tiene 420 empleados de los cuales 60 obtuvieron un aumento y un ascenso, 240 obtuvieron solo un aumento y 115 obtuvieron solo un ascenso. ¿Cuántos empleados no obtuvieron ni aumento ni ascenso?
 ii) En el listado de inscripciones de un grupo de 150 estudiantes, figuran 83 inscripciones en Análisis y 67 en Álgebra. Además se sabe que 45 de los estudiantes se anotaron en ambas materias. ¿Cuántos de los estudiantes no están inscriptos en ningún curso?
 iii) En un instituto de idiomas donde hay 110 alumnos, las clases de inglés tienen 63 inscriptos, las de alemán 30 y las de francés 50. Se sabe que 7 alumnos estudian los tres idiomas, 30 solo estudian inglés, 13 solo estudian alemán y 25 solo estudian francés. ¿Cuántos alumnos estudian exactamente dos idiomas? ¿Cuántos inglés y alemán pero no francés? ¿Cuántos no estudian ninguno de esos idiomas?
44. Si A es un conjunto con n elementos, ¿cuál es el cardinal del conjunto $\mathcal{P}(A)$?
45. Si se quiere probar mediante una tabla de verdad un enunciado, como en los ejercicios sobre conjuntos, que involucra k conjuntos A_1, \dots, A_k , ¿cuántas filas va a tener la tabla de verdad?
46. Si A es un conjunto con n elementos y B es un conjunto con m elementos, ¿cuál es el cardinal del conjunto $A \times B$?
47. Sean A_1, \dots, A_k conjuntos, con $k \in \mathbb{N}$. Se define el conjunto $A_1 \times \dots \times A_k$ como el conjunto de k -uplas ordenadas con primer elemento en A_1 , segundo elemento en A_2 , etc. Es decir:

$$A_1 \times \dots \times A_k = \{(a_1, \dots, a_k) : a_1 \in A_1, \dots, a_k \in A_k\}.$$

Si A_1, \dots, A_k son todos conjuntos finitos, ¿cuál es el cardinal de $A_1 \times \dots \times A_k$?

48. Si hay 3 rutas distintas para ir de Buenos Aires a Rosario, 4 rutas distintas para ir de Rosario a Santa Fe, y 2 para ir de Santa Fe a Reconquista ¿cuántos formas distintas hay para ir de Buenos Aires a Reconquista pasando por las dos ciudades intermedias?
49. Si A es un conjunto con n elementos y B es un conjunto con m elementos, ¿Cuántas relaciones de A en B hay? ¿Y de B en A ?
50. Si A es un conjunto con n elementos ¿Cuántas relaciones en A hay? ¿Cuántas de ellas son reflexivas? ¿Cuántas de ellas son simétricas? ¿Cuántas de ellas son reflexivas y simétricas?
51. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Se define la relación \mathcal{R} en $\mathcal{P}(X)$ en la forma

$$A \mathcal{R} B \iff A \cap \{1, 2, 3\} = B \cap \{1, 2, 3\}.$$

- i) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia y describir por comprensión la clase \overline{A} de $A = \{1, 3, 5\}$.
 ii) ¿Cuántos elementos tiene la clase \overline{A} de $A = \{1, 3, 5\}$?
52. Sea $X = \{1, 2, \dots, 20\}$. Se define la siguiente relación \mathcal{R} en $\mathcal{P}(X)$:

$$A \mathcal{R} B \iff A - B = \emptyset$$

- i) Probar que \mathcal{R} es una relación de orden.
 ii) ¿Cuántos conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$ cumplen que $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \mathcal{R} B$?

- 53.** i) Hallar todas las particiones de los conjuntos $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$. ¿Cuántas relaciones de equivalencia distintas hay en A , B y C ?
- ii) Sea $B(n)$ la cantidad de particiones que tiene un conjunto de n elementos. Expresar $B(4)$ en función de $B(1)$, $B(2)$ y $B(3)$, y calcular $B(4)$. ($B(n)$ se llama el n -ésimo número de Bell, por Eric Temple Bell, 1883–1960, matemático y autor de ciencia ficción escocés.)
- 54.** Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Sea \mathcal{F} el conjunto de todas las funciones $f : A \rightarrow B$.
- i) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto \mathcal{F} ?
- ii) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : 10 \notin \text{Im}(f)\}$?
- iii) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : 10 \in \text{Im}(f)\}$?
- iv) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : f(1) \in \{2, 4, 6\}\}$?
- 55.** Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.
- i) ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \rightarrow B$ hay?
- ii) ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \rightarrow B$ hay tales que $f(\{1, 2, 3\}) = \{12, 13, 14\}$?
- 56.** ¿De cuántas formas se pueden permutar los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Por ejemplo, todas las permutaciones de 1, 2, 3 son

1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 1, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; 3, 2, 1.

- 57.** ¿Cuántos anagramas tiene la palabra *estudio*? Por ejemplo, todos los anagramas de la palabra *aro* son aro, aor, rao, roa, oar y ora.
- 58.** Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
- i) ¿Cuántas funciones inyectivas $f : A \rightarrow B$ hay?
- ii) ¿Cuántas de ellas son tales que $f(1)$ es par?
- iii) ¿Cuántas de ellas son tales que $f(1)$ y $f(2)$ son pares?
- 59.** ¿Cuántas funciones biyectivas $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tales que $f(\{1, 2, 3\}) \subseteq \{3, 4, 5, 6, 7\}$ hay?
- 60.** Sea $A = \{f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ tal que } f \text{ es una función inyectiva}\}$.
Sea \mathcal{R} la relación en A definida por:

$$f \mathcal{R} g \iff f(1) + f(2) = g(1) + g(2)$$

- i) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- ii) Sea $f \in A$ la función definida por $f(n) = n + 2$.
¿Cuántos elementos tiene su clase de equivalencia?