1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre:
Libreta: Carrera:

Algebra I - Verano 2014
Final – 24/04/2014

---

1. Sea en $\mathbb{N}$ la relación
$$a \prec b \iff \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b = n^2 a.$$
   a) Probar que $\prec$ es una relación de orden, y que existen $a, b \in \mathbb{N}$ tal que $a \not\prec b$ y $b \not\prec a$.
   b) Sea $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 1000\}$ que satisface la propiedad que $\forall\, a, b \in A$ se tiene que $a \prec b$ o $b \prec a$. ¿Cuál es la cantidad máxima de elementos que puede tener A?

---

2. Decidir si existen $a, b \in \mathbb{N}$ que satisfacen
   a) $2a^6 = 3b^3$.
   b) $2a^3 = 3b^2$.

---

3. Sea p un primo impar.
   a) Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq \pm 1$. Probar que $a^{(p-1)p^n} - 1 \mid a^{(p-1)p^{n+1}} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y hallar el cociente.
   b) Sea $a \in \mathbb{Z}$. Probar que si $p \nmid a$, entonces $a^{(p-1)p^n} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

---

4. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a^{212} \equiv 2 \pmod 7$ y $(a^{103} + 3 : 4) = 2$.
Hallar los posibles restos de dividir a a por 28.

---

5. Calcular la cantidad de factores irreducibles de $X^{20} - X^{10} - 1$ en $\mathbb{R}[X]$.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen