MATEMATICA 2 - Verano 2014

Práctica 5 - Producto interno

En lo que sigue, $\langle \ , \ \rangle$ denota el producto interno canónico si no está especificado

1. Calcular el módulo de cada uno de los vectores siguientes, y normalizarlos.

   a) $u = (0, 1, 2)$, $v = (-1, 1, 1)$, $w = 3u$ y $z = u + v$

   b) $u = (i, 0, 0)$, $v = (1, 0, i)$

2. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos.

   a) $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 1, -2)$

   b) $A = (i + 1, i, i)$, $B = (1, i, 0)$

3. *a*) Sean $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, -1, 1)$. Hallar $w \in \mathbb{R}^3$, $w \neq 0$ tal que $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$. ¿Es único?

   b) Sea $u = (1, -1)$. Hallar todos los $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle u, v\rangle = 0$.

   c) Sea $u = (0, 0, 2)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle v, u\rangle = 0$.

   d) Sean $u = (1, 2)$, $v = (-1, 1)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\langle u, w\rangle = 1$ y $\langle v, w\rangle = 3$. Hallar w.

4. Decidir si son o no ciertas las siguientes proposiciones en K^n, $n \geq 2$:

   a) Si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$ para algún $u \neq 0$, entonces $v = w$.

   b) Si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$, $\forall\ u \in K^n$, entonces $v = w$.

5. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales o no.

   a) $v = (1, 1, 1), w = (1, 0, 1)$

   b) $v = (1, -2, 4), w = (-2, 1, 1)$

   c) $v = (1, i, 1), w = (i, 0, 1)$

   d) $v = (1, i, 1), w = (i, 1, 0)$

6. Calcular el ángulo entre los siguientes pares de vectores.

   a) $v = (1, 1), w = (1, 0)$

   b) $v = (3, 2, -1), w = (0, 1, 2)$

7. Sea la recta $S = \langle (3, 4)\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$ y p la proyección ortogonal sobre S. Hallar:

   a) El complemento ortogonal $S^{\perp}$ de S.

   b) $p(3, 4)$, $p(-4, 3)$ y $p(2, 1)$.

   c) El punto más cercano de la recta S a cada uno de los puntos $(3, 4)$, $(-4, 3)$ y $(2, 1)$. y la distancia de esos puntos a la recta S.

   d) Una fórmula explícita para $p(x_1, x_2)$ y la matriz $[p]_{\mathcal{E}}$ de p en la base canónica $\mathcal{E}$.

   e) Una base ortonormal $\mathcal{B}$ tal que $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. *a*) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(-1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.
   b) Calcular las coordenadas de $v = (1,1,1)$ y de $w = (1,0,0)$ en $\mathcal{B}'$.
   c) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base del plano
   $$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$
   y definir explicitamente la proyección ortogonal sobre ese plano.
   d) Calcular el punto de S más cercano a w, y la distancia que los separa. Idem para v.

9. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(0,i,0);(1,0,i);(0,0,1)\}$ de $\mathbb{C}^3$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.

10. Para los subespacios siguientes hallar el complemento ortogonal, y definir las proyecciones ortogonales sobre ellos y sus ortogonales.
    a) $\langle(1,2,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$
    b) $\{x \in \mathbb{R}^3 / \, 3x_1 + x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
    c) $\langle(i,1,1),(-1,0,i)\rangle \subseteq \mathbb{C}^3$
    d) $\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 \,/\, \begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i)x_3 + x_4 = 0 \end{cases}\right\} \subseteq \mathbb{C}^4.$

11. Sea $S = \langle(1,1,0,-1),(-1,1,1,0),(2,-1,1,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Hallar el punto de S más cercano a $(0,1,1,0)$, y la distancia de $(0,1,1,0)$ a S.

12. En $\mathbb{C}^{3\times 3}$ con el producto interno $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A\overline{B^t})$, hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales, i.e. las matrices con coeficientes todos nulos fuera de la diagonal principal.

13. En $\mathbb{R}_2[X]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$,
    a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1,\, X,\, X^2\}$.
    b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1\rangle$.
    c) Hallar los polinomios constantes más cercanos a X y a X^2 respectivamente.

14. *a*) En $C[-1,1]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$, hallar el polinomio de grado ≤ 2 más próximo a la función $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$.
    b) En $C[0,\pi]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{0}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$,
       1) aplicar el proceso de Gram-Schmidt al conjunto $\{1, \cos x, \mathrm{sen}\, x\}$.
       2) hallar el el elemento de $\langle 1, \cos x, \mathrm{sen}\, x\rangle$ más próximo a la función $f(x) = x$.

15. *a*) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que $\mathrm{Nu}(A)$ es ortogonal a $\mathrm{Im}(A)$.
    b) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermitiana, es decir tal que $\overline{A^t} = A$. Probar que $\mathrm{Nu}(A)$ es ortogonal a $\mathrm{Im}(A)$.

16. Encontrar una tercera columna para que la matriz $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sea ortogonal siendo
    $$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & * \end{pmatrix}.$$
    ¿Cuántas soluciones hay? Interpretar geométricamente.

17. Encontrar una tercera fila para que la matriz $Q \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ sea unitaria siendo

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3i}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

18. $(*)$ <u>*La solución de longitud (norma) mínima de un sistema compatible*</u>

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tal que el sistema $Ax = b$ es compatible.

a) Intuitivamente: suponiendo que $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\dim(\mathrm{Nu}(A)) = 1$, realizar un dibujo en $\mathbb{R}^2$ representando las rectas correspondientes a los conjuntos $\mathrm{Nu}(A)$ y $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$.
Determinar gráficamente la solución del sistema $Ax = b$ de longitud mínima (cómo debe ser con respecto a la recta $\mathrm{Nu}(A)$).

b) Probar que si existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ solución simultánea de $Ax = b$, $x \perp \mathrm{Nu}(A)$, entonces $\overline{x}$ es la solución de longitud mínima, i.e. $\forall\ x$ solución, $x \neq \overline{x}$, se tiene $\|\overline{x}\| < \|x\|$, , mediante los siguientes pasos:

1) Probar que si $x \neq \overline{x}$, entonces existe $z \in \mathrm{Nu}(A)$ no nulo tal que $x = \overline{x} + z$.
2) Calcular $\|x\|^2 = \langle \overline{x} + z, \overline{x} + z\rangle$ y concluir. (Recordar que $\overline{x} \perp \mathrm{Nu}(A)$).)
(Observar que esto implica en particular que si existe tal $\overline{x}$, entonces es único.)

c) Probar que siempre existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ solución simultánea de $Ax = b$, $x \perp \mathrm{Nu}(A)$, mediante los siguientes pasos

1) Justificar que sin perdida de generalidad se puede suponer $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \leq n$ y $\mathrm{Rg}(A) = m$.
2) Probar que el sistema que resulta de $Ax = 0, x \perp \mathrm{Nu}(A)$ es cuadrado y tiene como única solución el 0
3) Concluir del item anterior que la matriz que describe el sistema $Ax = 0, x \perp \mathrm{Nu}(A)$ es inversible, y por lo tanto $\forall\ b \in \mathbb{R}^m$ el sistema $Ax = b, x \perp \mathrm{Nu}(A)$ tiene una única solución.

d) Encontrar la solución de longitud mínima del sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

19. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.
b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.
c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.
d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, una rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $\langle(1, 0, 1)\rangle$.

20. Transformada de Fourier Discreta en $\mathbb{C}^N$

Sea $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ definida por:

$$F_{jk} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi ijk/N}, \qquad j, k = 0, \ldots, N-1.$$

Probar que:

- $\mathbf{F}$ es un múltiplo de una matriz de Vandermonde.
- $\mathbf{F}^*\mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{F}^* = I_N$ (donde $\mathbf{F}^*$ denota the transpuesta conjugada de $\mathbf{F}$).
- $\|\mathbf{F}x\|_2 = \|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{C}^N$.

Si $x \in \mathbb{C}^N$ se define $\widehat{x} \in \mathbb{C}^N$ por

$$\widehat{x}(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-2\pi ijk/N}.$$

El vector $\widehat{x}$ se denomina la transformada de Fourier de x. En forma matricial $\widehat{x} = \mathbf{F}x$.

Como $\mathbf{F}$ es unitaria, se tiene una formula de inversión: $x = \mathbf{F}^*\widehat{x}$, esto es

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{x}(j) e^{2\pi ijk/N}.$$

Hallar la matriz $\mathbf{F}$ y su inversa para $N = 4$ y si x = (i,0,1,1), calcular $\widehat{x}$ y escribir a x usando la fórmula de inversión.