MATEMATICA 2 - Verano 2014

Práctica 6 - Diagonalización

1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matrices A siguientes (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$). En cada caso decidir si la matriz es diagonalizable, y de ser posible, exhibir una matriz P inversible tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Como en el ejercicio anterior, discutiendo según los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

3. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

4. Sea $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que para toda fila F_i, la suma de sus coeficientes es igual a 1. Probar que 1 es autovalor de A y encontrar un autovector correspondiente.

5. Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que f es diagonalizable y calcular el polinomio característico $\mathcal{X}_f$ de f.

6. Calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}$ para las siguientes matrices A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinar en cada caso si es posible encontrar $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $B^2 = A$. ¿Y en $\mathbb{C}^{2\times 2}$?

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-7y + z, 4y, -2x + y + 3z).$$

a) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

b) Calcular $f^n := f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n veces), $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

c) Hallar, si es posible, una transformación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

8. Se define la siguiente sucesión de números enteros de la manera siguiente:

$$a_0 := 1, \quad a_1 := 2 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \ \forall\ n \geq 0.$$

a) Determinar $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que para todo $n \geq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

b) Usando lo anterior mostrar que para todo $n \geq 0$ se tiene

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Diagonalizando la matriz A determinar el valor de a_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

9. Encontrar una fórmula general para x_n e y_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, en función de x_0 e y_0 (ecuaciones en diferencias):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 6\,x_n + 2\,y_n \\ y_{n+1} & = & 2\,x_n + 3\,y_n \end{array} \right. .$$

10. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

a) $\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 8x(t) + 10y(t) \\ y'(t) & = & -5x(t) - 7y(t) \end{array} \right. .$

b) $\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) + 3y(t) \end{array} \right.$, con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Probar que $A^n \to 0$ (es decir:$(A^n)_{ij} \to 0$, $1 \leq i, j \leq 3$).

12. Supongamos que en cierta especie hay una epidemia en la que al cabo de cada mes se enferma la mitad de los que estaban sanos a principios de mes y muere la cuarta parte de los que estaban enfermos. Llamemos x_k al número de muertos al cabo del k–ésimo mes, y_k al número de enfermos al cabo del k–ésimo mes y z_k al número de sanos al cabo del k–ésimo mes.

a) Determinar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que describa el proceso, o sea tal que

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}.$$

b) Si la distribución original (x_0, y_0, z_0) al principio del primer mes (o término del mes 0) es $(0, 0, 10000)$, o sea de ningún enfermo y 10000 sanos, calcular el número de enfermos al cabo del k–ésimo mes.

c) Probar que cualquiera sea la distribución original (x_0, y_0, z_0), (x_k, y_k, z_k) tiende a un múltiplo de $(1, 0, 0)$ (determinarlo en función de (x_0, y_0, z_0)), es decir mueren todos (lo cual es obvio ya que se enferman o se mueren pero ni se curan ni nacen nuevos individuos en el modelo).

13. Para todos los casos de los ejercicios anteriores donde la matriz A a diagonalizar es simétrica, determinar una matriz ortogonal U tal que $U^t AU$ es diagonal.

14. Encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ unitaria tal que $\overline{U^t}AU$ sea diagonal para la matriz A siguiente:
$$\begin{pmatrix} 3 & 2i & 1 \\ -2i & 3 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

15. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

    a) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    b) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

16. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

17. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}.$$
Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^2$, se tiene $\|A\,v\| \geq 15\,\|v\|$.

18. *Descomposición polar de una matriz*

    a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que A admite una descomposición en la forma $A = Q\,P$ donde $Q, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfacen que Q es una matriz ortogonal y P es una matriz simétrica semidefinida positiva (es decir $v^t\,P\,v \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$).

    b) Calcular la descomposición polar de $A = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$.