Práctica 3

1. Decir qué propiedades (abierto, cerrado, acotado) tienen los siguientes conjuntos:

   a) $\mathbb{Q}$.

   b) $\mathbb{N}$.

   c) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

   d) $(0, 1]$.

   e) $\left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   f) $\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

2. Sean S, T subconjuntos de $\mathbb{R}$. Demostrar las propiedades siguientes:

   a) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.

   b) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?

   c) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?

   d) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?

   e) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?

   f) $(\mathbb{R} \setminus S)^\circ = \mathbb{R} \setminus \overline{S}$.

3. En cada uno de los siguientes casos hallar $S^\circ, \overline{S}$ y ∂S.

   a) $S = [0, 1]$.

   b) $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

   c) $S = [-1, 0) \cup \{1\}$.

   d) $S = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

   e) $\left\{\frac{(-1)^n n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   f) $S = \mathbb{Z}$.

4. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar :

   a) S es abierto si y solo si es disjunto con ∂S.

   b) S es cerrado si y solo si $\partial S \subset S$.

   c) S es cerrado si y solo si $S = S^\circ \cup \partial S$.

5. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar que $\partial S = \overline{S} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus S}$. Interpretar gráficamente.

6. Si $S \subseteq \mathbb{R}$, notamos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S.

   a) Hallar S' para cada uno de los conjuntos del Ejercicio 3.

   b) Un punto $p \in S$ se dice *punto aislado* de S si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(p-\varepsilon, p+\varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.

7. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{ \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

8. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados.

9. *Una función* $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *se llama una* *<u>norma</u>* *si cumple que:*

   - $N((x,y)) = 0$ *si y sólo si* $(x,y) = (0,0)$.
   - $N((\lambda x, \lambda y)) = |\lambda| N((x,y))$ *para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - $N((x_1,y_1) + (x_2,y_2)) \leq N((x_1,y_1)) + N((x_2,y_2))$ *para todo* $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$.

   Sean

   $$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$$
   $$\|(x,y)\|_\infty = \text{máx}\{|x|, |y|\}.$$

   Probar que las funciones $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas.

10. *Una función* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *se llama una* *<u>distancia</u>* *si cumple que:*

    - $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0$ *si y sólo si* $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$.
    - $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$ *para todo* $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$.
    - $d((x_1,y_1),(x_3,y_3)) \leq d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + d((x_2,y_2),(x_3,y_3))$ *para todo* (x_1,y_1), $(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2$.

    (a) Demostrar que si N es una norma en $\mathbb{R}^2$, entonces

    $$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = N((x_1 - x_2, y_1 - y_2))$$

    es una distancia en $\mathbb{R}^2$.

11. *Llamamos la bola de centro* (x_0,y_0) *y radio* r *asociada a una norma* N *al conjunto*

    $$B_N((x_0,y_0),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, N((x-x_0, y-y_0)) < R\}.$$

    Cuando el centro es el origen $(0,0)$ *la bola conrrespondiente suele denotarse* $B_N(r)$.

    (a) Dibujar las bolas correspondientes a la norma euclidea y a las normas N_1 y N_∞.

    (b) Ver gráficamente que $B_1(r) \subset B_e(r) \subset B_1(\sqrt{2}r)$ y que $B_e(r) \subset B_\infty(r) \subset B_e(\sqrt{2}r)$.

(c) Deducir contenciones análogas a las del item (b) entre las bolas correspondientes a las normas 1 e infinito.

(d) Deducir las contenciones de los items (a), (b) y (c) analíticamente.

12. Decir qué propiedades (abierto, cerrado, acotado) tienen los siguientes conjuntos.

    (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 1\}$.

    (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > y\}$.

    (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy > 0\}$.

    (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = y\}$.

13. Decidir si las propiedades del Ejercicio 2 siguen siendo válidas si S y T son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

14. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$. Hallar la adherencia $\overline{S}$.

15. Sea $U_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \parallel (x, y) - (0, n) \parallel < n\}$. Demostrar que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es el semiplano superior abierto.

16. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se considera el intervalo abierto $I_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$. Demostrar que $(0, 1) = \bigcup\limits_{n \geq 2} I_n$. ¿Existe un conjunto *finito* $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0, 1) = \bigcup\limits_{n \in \mathcal{F}} I_n$? Justificar. ¿Qué puede decir sobre la compacidad del conjunto $(0, 1)$?

17. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos:

    a) $\mathbb{Q}$.

    b) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

    c) $\mathbb{R}$.

    d) $[0, 1] \cup [100, 1000]$.

    e) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

    f) $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

18. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Probar que K tiene mínimo y máximo.

19. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada y sea P el conjunto de sus puntos límite. Probar que P es compacto. Mostrar que el límite inferior de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es el mínimo de P y el límite superior de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ el máximo.

20. Sean $S, T \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos compactos. Demostrar que $S \cup T$ y $S \cap T$ son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?

21. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar que S es compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S.

22. Mostrar que si K es compacto y F es cerrado, entonces $K \cap F$ es compacto.

23. Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Probar que los siguientes conjuntos también son compactos: $S = \{x + y : x, y \in K\}$, $P = \{x.y : x, y \in K\}$.