Ejercicios para entregar (3er semana)

1. Probar el Teorema de Heine-Borel en el plano:

   Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^2$ es compacto si y solo si K es cerrado y acotado.

2. En el plano todas las normas son equivalentes:

   Sea $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una norma.

   - Probar que existe una constante $C > 0$ tal que $N((x, y)) \leq C\|(x, y)\|_2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   - Mostrar que el conjunto $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_2 = 1\}$ es compacto.
   - Probar que existe una constante $D > 0$ tal que $\|(x, y)\|_2 \leq DN((x, y))$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

     Sugerencia: Suponer que no, construir una sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S^1$ tal que $N(w_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y utilizar los items anteriores.
   - Concluir que, si N y N' son dos normas en $\mathbb{R}^2$, entonces existen constantes positivas A y B tal que

     $$AN'((x, y)) \leq N((x, y)) \leq BN'((x, y)),$$

     para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Deducir que las métricas dadas por N y N' inducen los mismos abiertos, cerrados, compactos y sucesiones convergentes.