ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano de 2013

Práctica 4 - Geometría lineal

1. En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta L:
   (a) $L : t(-2, 3) + (2, 2)$
   $P_1 = (2, 2),\ P_2 = (-2, 3),\ P_3 = (0, 0),\ P_4 = (12, -13),\ P_5 = (2, -1).$
   (b) $L : t(-1, 1) + (3, -3)$
   $P_1 = (3, -3),\ P_2 = (0, 0),\ P_3 = (-1, 1),\ P_4 = (3, 4),\quad P_5 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$

2. Graficar y dar una ecuación vectorial para la recta que:
   (a) pasa por $P = (-1, 2)$ con vector director $v = (3, 1)$.
   (b) pasa por $P = (1, -4)$ y $Q = (-1, -3)$.
   (c) es paralela a la recta $L :\ t(-2, 3) + (1, -1)$ y pasa por $P = (1, -4)$.
   (d) es perpendicular a la recta $L :\ t(2, 3) + (5, 7)$ y pasa por el origen.

3. En cada uno de los siguientes casos, dar una ecuación vectorial para la recta que:
   (a) está dirigida por $v = (0, 1, 0)$ y pasa por $P = (0, 2, 4)$.
   (b) pasa por los puntos $P = (-2, 3, 4)$ y $Q = (-1, 3, 1)$.
   (c) es paralela al eje z y pasa por $P = (1, 2, 3)$.
   (d) es perpendicular a la recta $L :\ t(1, -2, 1) + (3, 5, 7)$ y pasa por $P = (1, 9, -3)$. ¿Es única?

4. Dar una ecuación paramétrica y una ecuación implícita para el plano que:
   (a) pasa por los puntos $(2, 1, 2),\ (1, 1, 1)$ y $(3, 2, 7)$.
   (b) pasa por el punto $(1, 2, 1)$ y es paralelo al plano que contiene a los ejes x e y.
   (c) es paralelo a la recta $L :\ t(1, 2, -4) + (1, 2, 1)$ y contiene a los puntos $P = (2, 2, 1)$ y $Q = (1, 2, -3)$.
   (d) contiene al punto $(-1, 2, 2)$ y es ortogonal a la recta $L :\ t(1, 1, -1) + (-1, 2, 2)$.

5. (a) Decidir si los puntos $A = (1, 1, 1),\ B = (-2, 0, 1)$ y $C = (3, 0, 2)$ son colineales (están sobre una misma recta) o no.
   (b) Decidir si los puntos $A = (8, 2, 4),\ B = (4, 2, 8),\ C = (-2, 0, 1)$ y $D = (1, -1, 3)$ son coplanares (están sobre un mismo plano) o no.

6. Dado el plano $\pi :\ 2x - 5y + 3z = 11$;
   (a) Hallar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2a, a, 7) \in \pi$.
   (b) Decidir si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $(1, 3a, 5a) \in \pi$.

7. Sean $\pi : 2x - y + 3z = 5,\ L : t(1, -1, -1) + (1, 0, -2)$ y $L' : t(3, 5, 1) + (0, 1, 2)$. Calcular $L \cap \pi$ y $L' \cap \pi$.

8. Determinar si las rectas L y L' resultan concurrentes, paralelas/coincidentes o alabeadas. En cada caso, decidir si existe un plano que contenga a L y L'. Si la respuesta es afirmativa, hallarlo.

   (a) $L:\ t(1,0,-1)+(-1,1,2), \quad L':\ t(-1,1,2)+(1,0,-1)$.
   (b) $L:\ t(1,1,-1)+(-1,2,2), \quad L':\ t(2,2,-2)+(1,0,-1)$.
   (c) $L:\ t(1,\frac{1}{2},-1)+(-1,1,2), \quad L':\ t(-2,-1,2)+(3,3,-2)$.
   (d) $L:\ t(1,2,-1)+(-1,-1,2), \quad L':\ t(-1,1,1)+(3,2,-1)$.

9. Determinar en qué casos los planos π_1 y π_2 se intersecan y hallar la intersección.

   (a) $\pi_1:\ 4x+2y-3z=1; \quad \pi_2:\ 2x+y-\frac{3}{2}z=1$.
   (b) $\pi_1:\ 3x-2y-1=0; \quad \pi_2$ el plano dirigido por $(0,0,1)$, $(2,3,3)$ que pasa por $(1,1,2)$.
   (c) π_1 el plano que pasa por $(-1,1,2)$ con vector normal $(1,2,-1)$;
   π_2 el plano que pasa por $(1,1,1)$, $(2,3,1)$ y $(-1,-2,2)$.

10. Hallar ecuaciones implícitas de la recta L en cada uno de los siguientes casos:

    (a) L es intersección del plano xy con el plano yz.
    (b) $L:\ t(1,0,-1)+(-1,1,2)$.
    (c) L pasa por los puntos $(-5,3,7)$ y $(2,-3,3)$.

11. Encontrar **todos** los puntos de la recta $L:\ t(1,-1,0)+(2,1,-1)$ que están a distancia 6 del punto $P=(2,1,-1)$.

12. Calcular la distancia entre:

    (a) la recta $L:\ t(1,1)+(3,0)$ y el punto $P=(-1,1)$.
    (b) la recta $L:\ t(1,1,0)+(3,0,0)$ y el punto $P=(-1,1,0)$.
    (c) el plano π que pasa por $(1,2,1)$ y tiene vector normal $(1,-1,2)$ y el punto $P=(1,2,5)$.

13. Sean $L: t(2,-2,-3)+(0,2,2)$ y $P=(0,-2,-1)$.

    (a) Hallar el plano π perpendicular a L que pasa por P y determinar $Q=L\cap\pi$.
    (b) Calcular $d=d(P,Q)$. ¿Qué significa el número d en este problema?

14. Sean π el plano de ecuación $x+y+z=1$ y L la recta $L: t(-1,0,1)+(1,1,2)$.

    (a) Probar que L es paralela a π.
    (b) Hallar una recta L' ortogonal a π que pase por $P=(1,1,2)$ y determinar $Q=L'\cap\pi$.
    (c) Calcular $d=d(P,Q)$. ¿Qué significa el número d en este problema?

15. Se consideran las rectas $L_1:\ \left\{\begin{array}{rl} 2x-y-z & =4 \\ 4x-y-2z & =9 \end{array}\right.$ y $L_2:\ t(1,0,2)+(1,2,-3)$.

    (a) Verificar que L_1 y L_2 son paralelas.
    (b) Hallar un plano π perpendicular a L_2 que pase por $P=(1,2,-3)$ y determinar $Q=L_1\cap\pi$.
    (c) Calcular $d=d(P,Q)$. ¿Qué significa el número d en este problema?

16. Se consideran las rectas $L_1:\ \left\{\begin{array}{rl} x+z & =5 \\ 2x+y+4z & =11 \end{array}\right.$ y $L_2:\ t(1,1,-1)+(0,2,1)$.

    (a) Verificar que L_1 y L_2 son alabeadas.
    (b) Hallar un plano π que contenga a L_1 y sea paralelo a L_2.
    (c) Calcular $d=d(P,\pi)$ para $P=(0,2,1)$. ¿Qué significa el número d en este problema?