ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano de 2013

Práctica 1 - Operaciones vectoriales

1. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 3)$ y $\vec{w} = (-1, -2)$ calcular analítica y gráficamente las siguientes operaciones:

   (a) $\vec{u} + \vec{v}$; $\quad \vec{v} + \vec{w}$.

   (b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$; $\quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

   (c) $3\vec{u} + 3\vec{v}$; $\quad 3(\vec{u} + \vec{v})$.

   (d) $\vec{u} - \vec{v}$.

2. Sea $\vec{w} = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano:

   (a) $L = \{t \cdot \vec{w} : \ t \in \mathbb{R}\}$.

   (b) $L = \{t \cdot \vec{w} : \ t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.

   (c) $L = \{t \cdot \vec{w} : \ t \in \mathbb{R}, \ 0 \leq t \leq 1\}$.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (-1, 1, 1)$ calcular las operaciones:

   (a) $\vec{u} + \vec{v}$.

   (b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

   (c) $\vec{u} - \vec{v}$.

   (d) $2\vec{u}$.

   (e) $-3\vec{w}$.

   (f) $-\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$.

4. En el bioterio observamos que el día primero de julio había 322 ratas de cepa α, 148 de cepa β y 290 de cepa γ. Durante el mes de julio se produjeron 104 nacimientos de cepa α, 48 de cepa β y 110 de cepa γ. A su vez murieron 220 animales, repartidos ordenadamente en 79 de la primera cepa, 51 de la segunda y 90 de la última cepa. Calcular el vector PI de población inicial, el vector N_7 de natalidad durante julio, el vector M_7 de mortalidad durante el mismo mes y el vector PF de población final al terminar el mes.

5. Calcular analítica y gráficamente el punto medio entre $P = (1, 4)$ y $Q = (3, 2)$.

6. Dados los puntos $A = (1, 7, 3)$, $B = (-1, 3, 0)$ y $C = (3, -4, 11)$ determinar:

   (a) los vectores $\overrightarrow{AB} = B - A$ y $\overrightarrow{BC} = C - B$.

   (b) el punto medio entre los puntos A y B.

7. Dados los vectores $\vec{v} = (1, -2, 2)$, $\vec{w} = (2, 0, 3)$ y $\vec{z} = (4, 4, 4)$ realizar las operaciones:

   (a) $\vec{v} \cdot \vec{w}$; $\quad \vec{w} \cdot \vec{v}$.

   (b) $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{z}$; $\quad (\vec{v} \cdot \vec{z}) + (\vec{w} \cdot \vec{z})$.

   (c) $(3\vec{v}) \cdot \vec{w}$; $\quad 3(\vec{v} \cdot \vec{w})$.

   (d) $\vec{v} \cdot \vec{v}$; $\quad \vec{w} \cdot \vec{w}$.

8. Calcular el módulo (o norma) de los vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ según corresponda:

   (a) $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-1, -2)$, $\vec{w} = (-3, 4)$, $\vec{z} = (\frac{-3}{5}, \frac{4}{5})$.

   (b) $\vec{u} = (0, 1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 1, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, 2) + (-1, 1, 1)$.

   (c) $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = -2 \cdot (2, -1, 3)$, $\vec{w} = 2 \cdot (2, -1, 3)$.

9. Normalizar cada uno de los vectores del ejercicio anterior.

10. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos:

    (a) $A = (1, -3)$; $B = (0, 0)$.
    (b) $A = (1, -3)$; $B = (4, 1)$.
    (c) $A = (1, 2, 3)$; $B = (4, 1, -2)$.
    (d) $A = (4, -2, 6)$; $B = (3, -4, 4)$.

11. Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ que verifican:

    (a) $\vec{v} = (4, k)$ y $\|\vec{v}\| = 5$.
    (b) $\vec{v} = (1, k, 0)$ y $\|\vec{v}\| = 2$.
    (c) $\vec{v} = k \cdot (2, 2, 1)$ y $\|\vec{v}\| = 1$.
    (d) $A = (1, 1, 1)$, $B = (k, -k, 2)$ y $d(A, B) = 2$.

12. Sea $C = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano los siguientes conjuntos:

    (a) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A\| = 1\}$.
    (b) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A\| \leq 1\}$.
    (c) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A - C\| = 1\}$.
    (d) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A - C\| \leq 1\}$.

13. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales (perpendiculares) o no:

    (a) $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (-2, 2)$.
    (b) $\vec{v} = (2, -3)$; $\vec{w} = (0, 0)$.
    (c) $\vec{v} = (1, 1, 1)$; $\vec{w} = (1, 0, 1)$.
    (d) $\vec{v} = (1, -2, 4)$; $\vec{w} = (-2, 1, 1)$.

14. Hallar:

    (a) Tres vectores en el plano, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (2, 3)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar.
    (b) Todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $\vec{v} = (2, -2)$ y tienen norma 1.
    (c) Tres vectores de $\mathbb{R}^3$, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (1, 3, -4)$.
    (d) Un vector de $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ y de norma 2. ¿Es único?
    (e) Dos vectores ortogonales a $\vec{v} = (3, 2, 7)$ que no sean colineales (es decir, que no sean uno múltiplo del otro).

15. Hallar el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

    (a) $\vec{v} = (1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1)$.
    (b) $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (0, 1)$.
    (c) $\vec{v} = (1, 2)$; $\vec{w} = (-2, 1)$.
    (d) $\vec{v} = (1, -1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1, 1)$.

16. Dados $\vec{u} = (3, 2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$ determinar:

    (a) el ángulo entre ambos vectores.
    (b) el módulo de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

17. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ dos vectores que verifican $\|\vec{u}\| = 1$ y $\|\vec{v}\| = 3$. ¿Es posible que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$? Justificar.

18. Calcular el producto vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ para los siguientes pares de vectores:

    (a) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\vec{v} = (1, -2, -4)$.
    (b) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\vec{v} = (2, 1, -3)$.
    (c) $\vec{u} = (2, 1, -3)$; $\vec{v} = (1, -2, -4)$.
    (d) $\vec{u} = (2, 0, 0)$; $\vec{v} = (0, 0, 3)$.

    En cada caso, verificar que $\vec{w}$ es ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

19. Sean $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 5, 2)$, $\vec{w} = (1, 2, 4)$ y $\vec{z} = (2, -4, 8)$. Hallar en $\mathbb{R}^3$:

    (a) un vector no nulo que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Es único?
    (b) todos los vectores que son, simultáneamente, ortogonales a $\vec{w}$ y $\vec{z}$.
    (c) un vector de norma 2 que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{w}$ y $\vec{z}$. ¿Es único?