Análisis II - Análisis matemático II - Matemática 3

Verano 2013

Práctica 1 - Curvas, integral de longitud de arco e integrales curvilíneas.

Curvas

1. *a*) Probar que $(x_1(t), y_1(t)) = (r\cos 2\pi t, r \operatorname{sen} 2\pi t)$, con $t \in [0,1]$ y $(x_2(t), y_2(t)) = (r\cos 4\pi t, r \operatorname{sen} 4\pi t)$, con $t \in [0,1]$ y son dos parametrizaciones C^1 de la circunferencia de centro (0; 0) y radio r.

   b) Probar que la circunferencia es una curva cerrada, simple, suave.

   c) Probar que $\sigma_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$, $t \in [0,1]$ no es una parametrización regular.

2. Considerar la curva C formada por los segmentos que unen el $(0,1)$ con el $(0,0)$ y el $(0,0)$ con el $(1,0)$.

$$\begin{array}{lcl} (0,1) & & \\ \quad | & & \\ (0,0) & \text{——} & (1,0) \end{array}$$

   Probar que

$$\sigma(t) := \begin{cases} (0,(1-t)^2), & \text{si } 0 \le t \le 1, \\ ((t-1)^2, 0), & \text{si } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

   es una parametrización C^1 de la curva C. Observar que C no tiene recta tangente en el $(0,0)$. ¿Por qué no hay contradicción?

3. Parametrice el segmento que une los puntos $(1,2,0)$ con $(4,0,6)$. Reparametrice la curva para que el módulo de la velocidad sea 1. Cuál es la longitud del intervalo de definición de la reparametrización?

4. Exhiba una curva parametrizada (en $\mathbb{R}^2$) que empiece en $(-1,0)$ y termine en $(0,-1)$ pero que no pase por $(0,0)$. Haga un dibujo.

5. Parametrice una circunferencia contenida en el plano de ecuación $x+y+z=1$, que esté centrada en el punto $(2,-2,1)$, y tenga radio 40. Reparametrice la circunferencia de manera que esté recorrida al doble de velocidad y en sentido contrario.

6. Sea $\sigma(t) = (t^3, t^3)$, con $-1 \le t \le 1$.

   Probar que σ es una parametrización C^1 del segmento $y = x$, $-1 \le x \le 1$ que es una curva suave. Observar que $\sigma'(0) = (0,0)$.

7. Sea C el arco de parábola $y = x^2$ con $0 \le x \le 1$.

   a) Probar que C es una curva abierta, simple, suave

   b) Probar que $\overline{\sigma}(s) = (\overline{x}(s), \overline{y}(s)) := (e^s - 1, (e^s-1)^2)$, con $0 \le s \le \log 2$ es una parametrizacíón regular de C.

   c) Observar que $\sigma(t) := (t, t^2)$ con $t \in [0,1]$ es otra parametrización regular.

   d) Hallar una función $g : [0,1] \to [0, \log 2]$ tal que $\overline{\sigma}(g(t)) = \sigma(t)$ $\forall t \in [0,1]$. Observar que g es biyectiva y C^1.

8. Sea C una curva cerrada, simple, suave y $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de C. Sean $\overline{a} \in (a,b)$ y $\overline{b} = b + a - \overline{a}$. Consideremos la función $\overline{\sigma} : [\overline{a}, \overline{b}] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\overline{\sigma}(s) = \begin{cases} \sigma(s) & \text{si } s \in [\overline{a}, b], \\ \sigma(a + (s-b)) & \text{si } s \in [b, \overline{b}], \end{cases}$$

Probar que $\overline{\sigma}$ es una parametrización regular de C (que recorre la curva C desde y hasta el punto $\sigma(a)$).

9. Sea C una curva simple, suave. Sea $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de C. Sea $[a_1, b_1]$ un intervalo arbitrario. Consideremos la función $\sigma_1 : [a_1; b_1] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\sigma_1(s) = \sigma\left(a + \frac{b-a}{b_1 - a_1}(s - a_1)\right)$$

Probar que σ_1 es una parametrización regular de C.

10. Determinar los vectores velocidad (σ') y aceleración (σ''), y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas cuyas parametrizaciones se dan a continuación, en el valor especificado de t.

    a) $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3)$; $t = 0$
    b) $\sigma(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$; $t = 0$
    c) $\sigma(t) = (\operatorname{sen} 3t, \cos 3t, 2t^{3/2})$; $t = 1$
    d) $\sigma(t) = (0, 0, t)$; t = 1

11. ¿Qué fuerza actúa sobre una partícula de masa m en el instante $t = 0$ si sigue la trayectoria dada por la función σ del item 1 del ejercicio anterior?

12. Suponer que una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que sale por una tangente en $t = 1$. Hallar la ubicación de la partícula en $t = 2$. Suponer que ninguna fuerza actúa sobre ella después del tiempo $t = 1$.

Integral de longitud de arco

13. Considerar una partícula que se mueve siguiendo la trayectoria $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$. Hallar la velocidad, rapidez (módulo del vector velocidad), y la longitud del arco descripto por la partícula entre los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(1)$. Observar que σ describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando. La curva que describe se conoce como cicloide.

14. En los siguientes casos, calcular la longitud de la curva, donde σ es una parametrización de la misma sobre el intervalo $[a,b]$, siendo:

    a) $\sigma(t) = (t, t^2)$, $a = 0$, $b = 1$
    b) $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t+1, t)$, $a = 10$, $b = 20$

15. Sea C una curva simple, suave y $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de la misma. Para cada $t \in [a,b]$ sea $g(t)$ la longitud del arco de curva entre los puntos $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$. Sabemos que

$$g(t) = \int_a^t ||\sigma'(s)|| ds$$

La función $g(t)$ resulta ser continuamente diferenciable con derivada no nula para todo t. (En particular, se tiene que $||\sigma'(t)|| = g'(t)$ es la variación instantánea de la longitud de arco en el punto $\sigma(t)$. Esto justifica que, cuando $\sigma(t)$ describe la posición de una partícula que se mueve sobre la curva C, la magnitud $||\sigma'(t)||$ es la rapidez con que se mueve la partícula).

Por ser $g'(t) \neq= 0$ para todo t, la función g admite una inversa continuamente diferenciable. Sea $\widetilde{\sigma}(s) = \sigma(g^{-1}(s))$. Probar que $\widetilde{\sigma} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$, con ℓ la longitud de C, es una parametrización regular de C tal que la rapidez es constantemente 1 y la longitud del arco que va de $\widetilde{\sigma}(0)$ a $\widetilde{\sigma}(s)$ es s. Esto justifica la notación ds que muchas veces se da al diferencial de longitud de arco.

16. Sea C la curva dada por $(x(t), y(t), z(t)) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, $t > 0$. Parametrizar esta curva por longitud de arco.

17. Evaluar las integrales de campos escalares a lo largo de la curva $\int_C f ds$ donde σ es una parametrización de C, en los casos siguientes

    a) $f(x, y, z) = x + y + z$, $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$
    b) $f(x, y, z) = \cos z$, σ como en la parte anterior.
    c) $f(x, y, z) = x \cos z$, $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$, $t \in [0, 1]$

18. *a*) Mostrar que la integral de una funcion $f(x, y)$ a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2} d\theta$$

    b) Calcular la longitud de la curva $r = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

19. Suponer que la semicircunferencia parametrizada por:

$$\sigma\theta = (0, a \operatorname{sen} \theta, a \cos \theta),\ \theta \in [0, \pi]$$

    con $a > 0$, está hecha de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

    a) ¿Cuál es la masa total del alambre?
    b) ¿Dónde está el centro de masa de esta configuración de alambre?
    c) Si la temperatura ambiente es igual a $x + y - z$ en el punto (x, y, z), calcular la temperatura promedio sobre el alambre.

20. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y C^1 a trozos, el gráfico de f en $[a, b]$ es una curva que se puede parametrizar como $\sigma(t) = (t, f(t))$ para $t \in [a, b]$.

    a) Mostrar que la longitud del gráfico de f en $[a, b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + |f'(t)|^2} dt$$

    b) Hallar la longitud del gráfico de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

21. Se quiere pintar una cerca que se encuentra sobre un campo ondulado. La cerca se encuentra a una distancia variable de una ruta recta que supondremos que ocupa el eje y.

    Pongamos el kilómetro 0 de la ruta a la altura del comienzo de la cerca. Esta se encuentra entre los kilómetros 0 y 1, a una distancia variable igual a $y(1 - y) + 1$ del kilómetro y de la ruta (calculada sobre el plano del nivel del mar).

    El terreno puede describirse por medio de su altura sobre el nivel del mar. Con ese fin, describiremos el plano del nivel del mar en términos de la distancia x (en kilómetros) desde el punto a la ruta (sobre el plano) y del kilometraje y que le corresponde sobre la ruta. En estos términos, la altura z del terreno sobre el nivel del mar en los puntos (x, y) cercanos a la cerca es $(1 - y) + x$.

    Nuestra cerca tiene altura variable $h = \frac{1+y}{750}$ a la altura del kilómetro y de la ruta si $0 \leq y \leq 1/2$ y $h = \frac{2-y}{750}$ si $1/2 \leq y \leq 1$.

    Si 1 litro de pintura rinde 4m^2 ¿Cuántos litros de pintura tengo que comprar?

Integrales curvilíneas

22. Sea $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Evaluar la integral curvilínea de F a lo largo de las curvas orientadas C dadas por las siguientes parametrizaciones:

    a) $\sigma(t) = (t,t,t)$, $t \in [0,1]$

    b) $\sigma(t) = (\sin t, 0, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$

23. Para las curvas orientadas C parametrizadas por las correspondientes funciones σ, evaluar las integrales siguientes:

    a) $\int_C xdy - ydx$, $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$

    b) $\int_C xdy + ydx$, $\sigma(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t)$, $t \in [0, 2]$

24. Considerar el campo de fuerzas $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.

25. Sea C una curva orientada suave parametrizada por σ.

    a) Suponer que F es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t. Mostrar que $\int_C F \cdot ds = 0$

    b) Si F es paralelo a $\sigma'(t)$ y apunta hacia el mismo lado (es decir, $F(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$ para cierta funcion $\lambda(t) \geq 0$), muestre que
    $$\int_C F \cdot ds = \int_C ||F|| ds$$

    c) ¿Cuál es el valor de la integral curvilínea de un campo gradiente sobre una curva cerrada C?

26. Suponer que $\nabla f(x,y,z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$. Si $f(0,0,0) = 5$, hallar $f(1,1,2)$.

27. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido (para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$) por:
    $$F(x,y,z) = \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z) = \left(\frac{-x}{||(x,y,z)||^3}, \frac{-y}{||(x,y,z)||^3}, \frac{-z}{||(x,y,z)||^3} \right)$$
    Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2), a lo largo de cualquier trayectoria, depende sólo de los radios $R_1 = ||(x_1, y_1, z_1)||$ y $R_2 = ||(x_2, y_2, z_2)||$.

28. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función C^1, $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo C^1 y $F = \nabla f + G$. Sea C una curva cerrada, simple, suave (a trozos), orientada. Verificar que
    $$\int_C F \cdot ds = \int_C G \cdot ds$$

29. Sea C una curva suave, $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de C. Sea $g : [\overline{a}, \overline{b}] \to [a,b]$ una biyección C^1 con $g'(s) \neq 0$ para todo $s \in [a,b]$. Sea $\overline{\sigma} : [\overline{a}, \overline{b}] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\overline{\sigma}(s) = \sigma(g(s))$. Llamamos a $\overline{\sigma}$ una **reparametrización** de σ.

    a) Probar que $\overline{\sigma}$ es una parametrización regular de C.

    b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua. Ver que el cálculo de $\int_C f ds$ da lo mismo cuando la integral se evalúa utilizando la parametrización σ o la parametrización $\overline{\sigma}$.

    c) Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continua. Suponer que orientamos a C con la orientación dada por σ. Ver que el cálculo de $\int_C F \cdot ds$ utilizando la parametrización $\overline{\sigma}$ da el mismo resultado que cuando se utiliza σ si $\overline{\sigma}$ tiene la misma orientación, y difiere en signo si la orientación es la opuesta.