

Análisis II–Análisis matemático II–Matemática 3.

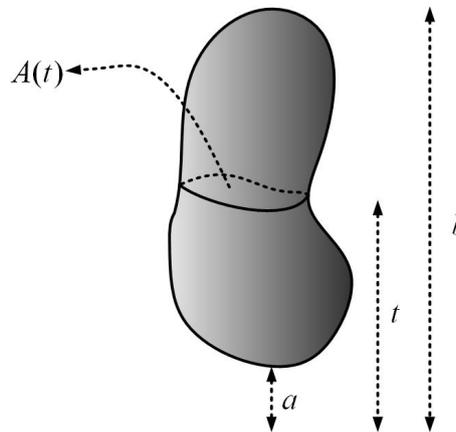
Práctica 0 - Repaso de integración y cambio de variables.

1 Principio de Cavalieri.

Ejercicio 1 Considerar un cuerpo que ocupa una región Ω en el espacio comprendida entre los planos $z = a$ y $z = \ell$. Deduzca que el volumen del cuerpo se puede calcular como

$$V = \int_a^\ell A(t) dt,$$

donde $A(t)$ es el área de la sección del cuerpo obtenido al intersecarlo con el plano $z = t$.



Ejercicio 2 Calcular el volumen de una región cilíndrica. Verificar que la fórmula resultante coincide con la fórmula empírica *superficie de la base por altura*.

Ejercicio 3 Calcular el volumen de la región encerrada por el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$.

2 Fubini.

Ejercicio 4 Sea R el rectángulo $R = [-1; 1] \times [0; 1]$. Evaluar las siguientes integrales dobles:

(a) $\iint_R x^2 y dA,$

(b) $\iint_R x \cos(xy) dA.$

Ejercicio 5 Sea R el rectángulo arbitrario $[a; b] \times [c; d]$. Expresar mediante integrales simples la integral doble $\iint_R F(x, y) dA$ cuando $F(x, y)$ está dada por

(a) $F(x, y) = f(x)g(y)$

(b) $F(x, y) = f(x) + g(y).$

3 Descripción de Regiones.

Ejercicio 6 Sea T el triángulo de vértices $(0; 0)$, $(2; 3)$ y $(3; 5)$. Describirlo como una región de tipo 1. Describirlo como una región de tipo 2. Hallar el área.

Ejercicio 7 Para cada una de las siguientes descripciones, graficar la región correspondiente y calcular el área respectiva.

$$(a) -1 \leq x \leq 1 + y; -1 \leq y \leq 1,$$

$$(b) 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}; 0 \leq x \leq 1,$$

Ejercicio 8 Sea \mathcal{P} la pirámide cuyos vértices son $(0; 0; 0)$, $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$ y $(0; 0; 1)$. Describirla analíticamente. Hallar el volumen.

4 Aplicaciones de la integral.

Ejercicio 9 *Valor medio*: Hallar el valor medio de la función $f(x, y) = x^2y$ en la región triangular de vértices $(1; 1)$; $(2; 0)$ y $(0; 1)$.

Ejercicio 10 *Masa*: Hallar la masa de la región esférica $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ sabiendo que la densidad de masa es proporcional a la componente z , digamos $\rho = \lambda z$.

Ejercicio 11 *Campo gravitatorio* : Consideremos un cuerpo material con densidad $\rho(x, y, z)$. que ocupa la región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. A partir de las leyes de Newton, se sabe que el **vector** campo gravitatorio que aparece en el punto de coordenadas cartesianas (x, y, z) está dado por la siguiente integral, escrita en forma vectorial con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, las coordenadas del punto donde queremos medir el campo, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, las coordenadas de un punto genérico del cuerpo y G una constante universal:

$$E(\mathbf{r}) = -G \iint_{\Omega} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}').$$

Supongamos que el cuerpo ocupa una región acotada en el espacio, digamos $\Omega \subset B_R(0)$ y observemos que $\|E(\mathbf{r})\| \sim \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2}$ cuando $\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty$.

A medida que $\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty$, la dirección del vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ con $\mathbf{r}' \in \Omega$ se parece más y más a la dirección de \mathbf{r} .

Esto hace suponer para puntos *lejanos*, el campo puede aproximarse por el campo gravitatorio que se obtiene al concentrar la masa total M en el origen: $E_0(\mathbf{r}) = -MG \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$.

Probar que esto es realmente así. Es decir, probar que

$$\lim_{\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty} \|\mathbf{r}\|^2 \|E(\mathbf{r}) - E_0(\mathbf{r})\| = 0.$$

Nota: Hemos usado la notación $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ para el producto escalar de los vectores. La idea del último ejercicio es aprovechar para hablar de integrar vectores y de la desigualdad $\|\int \mathbf{f}\| \leq \int \|\mathbf{f}\|$

5 Cambio de Variables.

Ejercicio 12 Sean $T(u, v) = T(x(u, v), y(u, v)) = (a_{11}u + a_{12}v, a_{21}u + a_{22}v)$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Sea D^* el rectángulo $[0, 3] \times [1, 3]$.

- (a) Hallar $D = T(D^*)$. ¿Es biyectiva T ? Observar que D es un paralelogramo y hallar su área.
- (b) Describir el área de D en términos de una integral sobre D^* . Indicar qué función hay que integrar y qué relación tiene con T .

Ejercicio 13 Sea D el paralelogramo de vértices $(1, 2)$, $(5, 3)$, $(2, 5)$, $(6, 6)$. Calcular

- (a) $\int_D xy \, dx dy$
- (b) $\int_D (x - y) \, dx dy$

Sugerencia: Plantear las integrales como integrales sobre el cuadrado $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$.

Ejercicio 14 Sean $D^* = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y P la transformación de coordenadas polares a cartesianas, es decir, $P(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- (a) Mostrar que $P(D^*) = D$. ¿Es biyectiva P ?
- (b) ¿En qué transforma P el rectángulo $[r, r + \Delta r] \times [\theta, \theta + \Delta \theta]$?
- (c) Calcular la matriz $DP(r, \theta)$. ¿En qué transforma la aplicación dada por esta matriz al rectángulo dado en b)? ¿Y en el caso $r = 0$?
- (d) Escribir la demostración de la fórmula de cambio de variables en este caso (haciendo los dibujos correspondientes).

Ejercicio 15 Sean $D_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 4\pi\}$ y P la transformación del ejercicio anterior.

- (a) Hallar $D = P(D_1)$.
- (b) Calcular $\int_D (x^2 + y^2) \, dx dy$ y $\int_{D_1} r^2 J \, dr d\theta$ siendo J el jacobiano de la transformación polar.

¿Dan igual las dos integrales? ¿Por qué?

Ejercicio 16 Hallar el área acotada por la curva dada por la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$. Esta curva se llama lemniscata.

Ejercicio 17 Calcular $\int_B z \, dx \, dy \, dz$ donde B es la región sobre el plano xy dentro del cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ y debajo del cono dado por $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Ejercicio 18 Sea E el elipsoide dado por $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1$.

- (a) Hallar el volumen de E .
- (b) Calcular $\int_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)] \, dx dy dz$.

Ejercicio 19 Hallar el centro de masa del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$, si la densidad es $\rho = (x^2 + y^2)z^2$.

Ejercicio 20 Si un sólido W tiene densidad uniforme ρ , el *momento de inercia* alrededor del eje x está definido por,

$$I_x = \int_W \rho (y^2 + z^2) dx dy dz$$

y análogamente se definen I_y e I_z . Sea ahora W el sólido con densidad constante acotado por arriba por el plano $z = a$ y por debajo por el cono descrito en coordenadas esféricas por $\phi = k$, donde k es una constante tal que $0 < k < \pi/2$. Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje z .