1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

ANALISIS I- MATEMATICA 1 - ANALISIS MATEMATICO I - ANALISIS II(C)

Examen Final- 11/4/2013

1. *a*) Encuentre la ecuación (en forma explícita) $z = T(x,y)$ del plano tangente al gráfico de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{x+y}$ en el punto $(0,0,f(0,0))$.

b) Demuestre que en un entorno U del $(0,0)$ se verifica que:

$$T(x,y) \leq e^{x+y} \text{ para todo } (x,y) \in U$$

c) Supongamos que en un entorno V del $(0,0)$ la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisface la desigualdad:

$$T(x,y) \leq g(x,y) \leq e^{x+y} \text{ para todo } (x,y) \in V$$

Demostrar que entonces g es diferenciable en $(0,0)$ y calcular $\nabla g(0,0)$.

2. *a*) Sea $f : B \to \mathbb{R}$ diferenciable, donde B es una bola abierta en $\mathbb{R}^2$. Demostrar que si $\nabla f(a,b) = 0$ para todo $(a,b) \in B$, entonces f es contante en B.

b) Deducir que si $f, g : B \to \mathbb{R}$ son diferenciables y $\nabla f(a,b) = \nabla g(a,b)$ para todo $(a,b) \in B$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = g(x,y) + c$ para todo $(x,y) \in B$.

3. *a*) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Supongamos que f tiene en un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un mínimo local. Demostrar que entonces $\nabla f(x_0) = 0$ y que la forma cuadrática

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x_0)\, h_i h_j$$

(asociada al Hessiano de f en x_0) es semidefinida positiva.

b) ¿Es cierto que si f es C^2, $\nabla f(x_0) = 0$ y Q es semidefinida positiva, entonces puede afirmarse que f tiene en x_0 un mínimo local?

Nota: Si le resulta más sencillo puede resolverlo en $n = 2$ (no altera esencialmente la dificultad del ejercicio).

4. Sea $f : (2,\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por la integral doble,

$$f(t) = \int\int_{A_t} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\, dxdy$$

siendo A_r la región

$$A_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq t\}$$

Encuentre los puntos críticos de f y clasifíquelos.

Justifique todas sus respuestas.