1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ANALISIS I- MATEMATICA 1 - ANALISIS MATEMATICO I - ANALISIS II(C)

Examen Final- 9/5/2013

---

1. i) Demuestre el teorema de Weierstrass: si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado (es decir: compacto) y $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua (en K), entonces f es acotada en K, y alcanza su máximo y su mínimo en K

ii) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

y $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| = 1\}$ es la circunferencia centrada en el origen de radio 1.
¿ Se verifican <u>las hipótesis</u> del teorema de Weierstrass ? ¿ Cuáles son el máximo y el mínimo de f en K ? ¿En qué puntos se alcanzan ? Justifique su respuesta.

---

2. i) Enuncie y demuestre el teorema fundamental del cálculo [cómo se calcula $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)$] y la regla de Barrow (cómo se calcula $\int_a^b f(x)\, dx$ a partir de una primitiva de f).

ii) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $E(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$, en un entorno de $x = 0$.

---

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Consideramos

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

Supongamos que f restringida a Q tiene en el punto $(-1,0)$ un mínimo absoluto

i) Demostrar que $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = 0$ y que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) \geq 0$

ii) ¿Puede afirmarse que $\nabla f(-1,0) = (0,0)$? Justifique su respuesta [en caso afirmativo, demuéstrelo; en caso negativo, exhiba un contraejemplo]

---

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, que verifica las siguientes condiciones:

a) f se anula sobre la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2$

b) Si consideramos la función $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t+1, e^t)$, entonces la función compuesta $f \circ \alpha$ tiene un mínimo local en $t = 0$.

Calcule el gradiente de f en el punto $(1,1)$

Justifique todas sus respuestas.