

Práctica 7 (Adicional: Separación de variables)

Separación de variables

1. Hallar los autovalores y las autofunciones de los siguientes problemas:

a) $u'' + \lambda u = 0$, para $0 < x < \pi$ y con las siguientes condiciones de contorno:

i) $u(0) = u(\pi) = 0$

ii) $u'(0) = u'(\pi) = 0$

iii) $u(0) = u'(0) = 0$

b) $u'' + \lambda u = 0$, $-\pi < x < \pi$, $u(-\pi) = u(\pi)$ y $u'(-\pi) = u'(\pi)$

2. Usando separación de variables resolver:

a) $\frac{\partial u}{\partial x} - 4\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u(0, y) = 8e^{-3y}$.

b) $\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < 1$, $t > 0$.

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad |u(x, t)| < M, \quad u(x, 0) = 5 \operatorname{sen}(4\pi x) - 3 \operatorname{sen}(8\pi x) + 2 \operatorname{sen}(10\pi x).$$

c) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$, $u(2, t) = 0$,

$$u(x, 0) = 8 \cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right) - 6 \cos\left(\frac{9\pi x}{4}\right).$$

d) $\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ $0 < x < \pi$, $t > 0$.

$$u(x, 0) = x(\pi - x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0,$$

donde κ es una constante positiva.