MATEMATICA 2 - Verano 2012

Práctica 5 - Determinantes

1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ con $\det(A) = 8$. Calcular $\det(3A)$ y $\det(-A)$.

3. Demostrar, sin calcular, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 a & 1 & \cos^2 a \\ \operatorname{sen}^2 b & 1 & \cos^2 b \\ \operatorname{sen}^2 c & 1 & \cos^2 c \end{pmatrix}$$

4. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Si A es una matriz inversible tal que tanto A como A^{-1} tienen sus coeficientes enteros, ¿por qué ambos determinantes deben dar 1 ó -1 ?

6. Demostrar que las raíces de la ecuación $\det \begin{pmatrix} \lambda - a & b \\ b & \lambda - c \end{pmatrix} = 0$, para $a, b, c \in \mathbb{R}$ dados, y la variable λ, son reales.

7. *a)* Hallar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonal con $\det(A) = -1$.

   b) ¿Cuánto vale el determinante de una matriz ortogonal? ¿Y el de una matriz unitaria? ¿Cuál es su rango?

8. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

   Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A es inversible y en esos casos hallar la inversa.

9. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, probar que no existe ninguna matriz $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible que satisface que $C\,B = A\,C$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

10. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$
y sea $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ cualquiera. ¿Puede el sistema de ecuaciones lineales $A\,x = b$ ser compatible determinado?

11. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es el sistema lineal
$$\begin{cases} -x + a\,y + z &= a \\ -x + (1-a)z &= 1 \\ -x + y + z &= a^2 \end{cases}$$
compatible determinado? Resolver el sistema para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

12. Encontrar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $Ax = x$ admite solución no trivial, siendo
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

13. *a*) Calcular el área del triángulo con vértices en el $(0,0)$, $(2,2)$ y $(-1,3)$.

    b) Calcular el volumen del paralelepípedo con 4 vértices en $(0,0,0)$, $(-1,2,2)$, $(2,-1,2)$ y $(2,2,-1)$. ¿Cuáles son sus otros vértices?

Aplicaciones del determinante de Vandermonde

14. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, todos distintos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita.

    (Sugerencia: Derivar $n-1$ veces la función $\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i x}$.)

15. Interpolación de polinomios:

    Sean $a_0, \dots, a_n \in K$ todos distintos y $b_0, \dots, b_n \in K$ cualesquiera. Probar que existe un único polinomio $P \in K[X]$ de grado menor o igual que n (o nulo) que satisface simultáneamente las condiciones
$$P(a_0) = b_0,\ P(a_1) = b_1, \dots, P(a_n) = b_n.$$