

**MATEMÁTICA 2 - Verano 2012****Práctica 4 - Producto interno**

En lo que sigue,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto interno canónico si no está especificado

- Calcular el módulo de cada uno de los vectores siguientes, y normalizarlos
  - $u = (0, 1, 2)$ ,  $v = (-1, 1, 1)$ ,  $w = 3u$  y  $z = u + v$
  - $u = (i, 0, 0)$ ,  $v = (1, 0, i)$
- Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos
  - $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (4, 1, -2)$
  - $A = (i + 1, i, i)$ ,  $B = (1, i, 0)$
- Sean  $u = (1, 2, -1)$ ,  $v = (1, -1, 1)$ . Hallar  $w \in \mathbb{R}^3$ ,  $w \neq 0$  tal que  $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$ . ¿Es único?
  - Sea  $u = (1, -1)$ . Hallar todos los  $v \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\|v\| = \|u\|$  y  $\langle u, v \rangle = 0$ .
  - Sea  $u = (0, 0, 2)$ . Hallar todos los vectores  $v \in \mathbb{R}^3$  tales que  $\|v\| = \|u\|$  y  $\langle v, u \rangle = 0$ .
  - Sean  $u = (1, 2)$ ,  $v = (-1, 1)$  y  $w \in \mathbb{R}^2$  tales que  $\langle u, w \rangle = 1$  y  $\langle v, w \rangle = 3$ . Hallar  $w$ .
- Decidir si son o no ciertas las siguientes proposiciones en  $K^n$ ,  $n \geq 2$ :
  - Si  $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$  para algún  $u \neq 0$ , entonces  $v = w$ .
  - Si  $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ ,  $\forall u \in K^n$ , entonces  $v = w$ .
- Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales o no
  - $v = (1, 1, 1)$ ,  $w = (1, 0, 1)$
  - $v = (1, -2, 4)$ ,  $w = (-2, 1, 1)$
  - $v = (1, i, 1)$ ,  $w = (i, 0, 1)$
  - $v = (1, i, 1)$ ,  $w = (i, 1, 0)$
- Calcular el ángulo entre los siguientes pares de vectores
  - $v = (1, 1)$ ,  $w = (1, 0)$
  - $v = (3, 2, -1)$ ,  $w = (0, 1, 2)$
- Sea la recta  $S = \langle (3, 4) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$  y  $p$  la proyección ortogonal sobre  $S$ . Hallar:
  - El complemento ortogonal  $S^\perp$  de  $S$ .
  - $p(3, 4)$ ,  $p(-4, 3)$  y  $p(2, 1)$ .
  - El punto más cercano de la recta  $S$  a cada uno de los puntos  $(3, 4)$ ,  $(-4, 3)$  y  $(2, 1)$ . y la distancia de esos puntos a la recta  $S$ .
  - Una fórmula explícita para  $p(x_1, x_2)$  y la matriz  $[p]_{\mathcal{E}}$  de  $p$  en la base canónica  $\mathcal{E}$ .
  - Una base ortonormal  $\mathcal{B}$  tal que  $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

8. a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base  $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  para obtener una base ortonormal  $\mathcal{B}'$ .  
 b) Calcular las coordenadas de  $v = (1, 1, 1)$  y de  $w = (1, 0, 0)$  en  $\mathcal{B}'$ .  
 c) Hallar una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  que contenga una base del plano

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

y definir explícitamente la proyección ortogonal sobre ese plano.

- d) Calcular el punto de  $S$  más cercano a  $w$ , y la distancia que los separa. Idem para  $v$ .
9. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base  $\mathcal{B} = \{(0, i, 0); (1, 0, i); (0, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{C}^3$  para obtener una base ortonormal  $\mathcal{B}'$ .
10. Para los subespacios siguientes hallar el complemento ortogonal, y definir las proyecciones ortogonales sobre esos subespacios
- a)  $\langle(1, 2, 1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$   
 b)  $\{x \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 + x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$   
 c)  $\langle(i, 1, 1), (-1, 0, i)\rangle \subseteq \mathbb{C}^3$   
 d)  $\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / \begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i)x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\} \subseteq \mathbb{C}^4$ .

11. Sea  $S = \langle(1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ . Hallar el punto de  $S$  más cercano a  $(0, 1, 1, 0)$ , y la distancia de  $(0, 1, 1, 0)$  a  $S$ .
12. En  $\mathbb{C}^{3 \times 3}$  con el producto interno  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A\overline{B}^t)$ , hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales, i.e. las matrices con coeficientes todos nulos fuera de la diagonal principal.
13. En  $\mathbb{R}_2[X]$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ ,
- a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base  $\{1, X, X^2\}$ .  
 b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio  $S = \langle 1 \rangle$ .  
 c) Hallar los polinomios constantes más cercanos a  $X$  y a  $X^2$ .
14. a) En  $C[-1, 1]$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ , hallar el polinomio de grado  $\leq 2$  más próximo a la función  $f(x) = \sin(\pi x)$ .  
 b) En  $C[0, \pi]$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x) dx$ ,
- 1) aplicar el proceso de Gram-Schmidt al conjunto  $\{1, \cos x, \sin x\}$ .  
 2) hallar el elemento de  $\langle 1, \cos x, \sin x \rangle$  más próximo a la función  $f(x) = x$ .
15. a) Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz simétrica. Probar que  $\text{Nu}(A)$  es ortogonal a  $\text{Im}(A)$ .  
 b) Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz hermitiana, es decir tal que  $\overline{A}^t = A$ . Probar que  $\text{Nu}(A)$  es ortogonal a  $\text{Im}(A)$ .

16. Encontrar una tercera columna para que la matriz  $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  sea ortogonal siendo

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & * \end{pmatrix}.$$

¿Cuántas soluciones hay? Interpretar geoméricamente.

17. Encontrar una tercer fila para que la matriz  $Q \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  sea unitaria siendo

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3i}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

18. (\*) La solución de longitud (norma) mínima de un sistema compatible

Sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}^m$  tal que el sistema  $Ax = b$  es compatible.

- a) Intuitivamente: suponiendo que  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $\dim(\text{Nu}(A)) = 1$ , realizar un dibujo en  $\mathbb{R}^2$  representando las rectas correspondientes a los conjuntos  $\text{Nu}(A)$  y  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ . Determinar gráficamente la solución del sistema  $Ax = b$  de longitud mínima (cómo debe ser con respecto a la recta  $\text{Nu}(A)$ ).
- b) Probar que si existe  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  solución simultánea de  $Ax = b$ ,  $x \perp \text{Nu}(A)$ , entonces  $\bar{x}$  es la solución de longitud mínima, i.e.  $\forall x$  solución,  $x \neq \bar{x}$ , se tiene  $\|\bar{x}\| < \|x\|$ , mediante los siguientes pasos:
- 1) Probar que si  $x \neq \bar{x}$ , entonces existe  $z \in \text{Nu}(A)$  no nulo tal que  $x = \bar{x} + z$ .
  - 2) Calcular  $\|x\|^2 = \langle \bar{x} + z, \bar{x} + z \rangle$  y concluir. (Recordar que  $\bar{x} \perp \text{Nu}(A)$ .)  
(Observar que esto implica en particular que si existe tal  $\bar{x}$ , entonces es único.)
- c) Probar que siempre existe  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  solución simultánea de  $Ax = b$ ,  $x \perp \text{Nu}(A)$ , mediante los siguientes pasos
- 1) Justificar que sin pérdida de generalidad se puede suponer  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con  $m \leq n$  y  $\text{Rg}(A) = m$ .
  - 2) Probar que el sistema que resulta de  $Ax = 0, x \perp \text{Nu}(A)$  es cuadrado y tiene como única solución el 0
  - 3) Concluir del ítem anterior que la matriz que describe el sistema  $Ax = 0, x \perp \text{Nu}(A)$  es inversible, y por lo tanto  $\forall b \in \mathbb{R}^m$  el sistema  $Ax = b, x \perp \text{Nu}(A)$  tiene una única solución.
- d) Encontrar la solución de longitud mínima del sistema  $Ax = b$  con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

19. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

- a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , rotación de ángulo  $\frac{\pi}{3}$ .
- b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , simetría respecto de la recta de ecuación  $x_1 - x_2 = 0$ .
- c)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , simetría respecto del plano de ecuación  $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ .
- d)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , rotación de ángulo  $\frac{\pi}{4}$  y eje  $\langle (1, 0, 1) \rangle$ .