

**MATEMÁTICA 2 - Verano 2012****Práctica 1 - Repaso de matrices y sistemas de ecuaciones lineales**(En todas las prácticas,  $K = \mathbb{R}$  (los números reales) o  $\mathbb{C}$  (los números complejos))

1. Cuando sea posible, calcular  $A + 2B$ ,  $AB$  y  $BA$ . ¿Vale la igualdad entre estos productos?

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$b) A = (1 \ 2 \ 3), B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$d) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Exhibir matrices  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B \neq 0$ , tales que  $A^2 = -\text{Id}$  y  $B^2 = 0$ .

3. Sean  $A, B$  y  $C \in K^{n \times n}$ . Mostrar un contraejemplo con  $n = 2$  para cada una de las siguientes afirmaciones (que son por lo tanto todas falsas):

$$a) (AB)^2 = A^2B^2.$$

$$d) AB = 0 \Rightarrow BA = 0.$$

$$b) AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ó } B = 0.$$

$$e) A^j = 0 \text{ para algún } j \geq 2 \Rightarrow A = 0.$$

$$c) AB = AC \text{ y } A \neq 0 \Rightarrow B = C.$$

$$f) (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

4. Si  $A$  es una matriz con una fila de ceros, ¿es cierto que para toda matriz  $B$ ,  $AB$  tiene una fila de ceros? (siempre que  $AB$  esté definido.) ¿Vale lo mismo con columnas?

5. Probar que si  $A, B \in K^{n \times n}$  satisfacen que  $Ax = Bx, \forall x \in K^n$ , entonces  $A = B$ .

6. Sea  $A \in K^{n \times n}$  una matriz inversible y sean  $B, C \in K^{n \times m}$ . Probar:

$$a) AB = AC \Rightarrow B = C.$$

$$b) AB = 0 \Rightarrow B = 0.$$

7. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa para matrices  $A, B \in K^{n \times n}$ . Justificar.

$$a) A, B \text{ inversibles} \Rightarrow A + B \text{ inversible.}$$

$$b) A \text{ nilpotente (es decir, } \exists j \in \mathbb{N} / A^j = 0) \Rightarrow A \text{ no es inversible.}$$

8. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales sobre  $\mathbb{R}$ , y los sistemas homogéneos asociados. ¿Cambia algo si se resuelven sobre  $\mathbb{C}$ ?

$$a) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Verificar que en cada caso, el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo es igual a una solución particular más el conjunto de soluciones del homogéneo asociado.

9. Encontrar los coeficientes de la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  que pasa por los puntos  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$  y  $(3, 0)$ .

10. Resolver sobre  $\mathbb{C}$  el sistema

$$\begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

11. Determinar los valores de  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  para los cuales el siguiente sistema tiene solución:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = \beta \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \gamma \end{cases}$$

12. Determinar para qué valores de  $a, b \in \mathbb{R}$  cada uno de los sistemas siguientes tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones. En el caso de los sistemas homogéneos, si la solución es única, ¿cuál es?

$$a) \begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ (a+1)x_2 + x_3 = 0 \\ (a^2-4)x_3 = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + ax_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \quad d) \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 = -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 = b \end{cases}$$

13. Decidir si (o cuándo) las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad e) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad f) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$