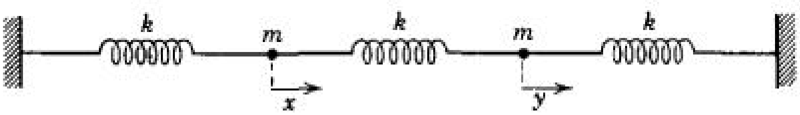
MATEMÁTICA 2 - Verano 2012

Práctica 6 - Aplicaciones
Diagonalización

1. Sean x_1 y x_2 las posiciones de dos masas con respecto a la posición de equilibrio.



La energía cinética T y la energía potencial V del sistema son

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2), \\ V &= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}k(2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2). \end{aligned}$$

a) Hallar matrices $A, B \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m \begin{pmatrix} \dot{x_1} & \dot{x_2} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} \\ V &= \frac{1}{2}k \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Encontrar un cambio de bases

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \end{pmatrix}$$

tal que $C^{-1}BC$ sea diagonal y escribir las ecuaciones anteriores en la nueva base.

c) Encontrar las soluciones x_1, x_2, planteando las ecuaciones de Lagrange. (Ver, por ejemplo, "Mathematical Methods in the Physical Sciences" de Mary Boas, pp 423 $\sim$ 425 de la segunda edición.)

2. Calcular los autovectores y autovalores de la transformación de Lorentz definida en las aplicaciones de la Práctica 3, e interpretar físicamente. (Recordar que vimos en las aplicaciones de la Práctica 5 que la transformación de Lorentz es una rotación en el Espacio de Minkowski.)

Para más información, ver por ejemplo, http://ocw.nthu.edu.tw/ocw/upload/20/201/AP1-Eigensystem.pdf.