MATEMÁTICA 2 - Verano 2012

Práctica 5 - Aplicaciones

Determinantes

1. Sean $a(t), b(t), c(t), d(t) \in C^\infty$ y

$$D(t) = \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}.$$

   a) Probar que $D(t) \in C^\infty$.

   b) Probar la fórmula

$$D'(t) = \begin{vmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}.$$

2. Dadas $x_1(t), x_2(t) \in C^\infty$ se define el Wroskiano de x_1 y x_2,

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}.$$

   a) Probar la fórmula

$$W'(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) \end{vmatrix}.$$

   b) Probar que si $a_1(t), a_2(t) \in C^\infty$ y $x_1(t), x_2(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$$

   en un intervalo I, entonces para todo $t \in I$,

$$W(t) = ce^{-\int a_1(t)dt}.$$

   Sugerencia: probar que $W'(t) = -a_1 W(t)$.

   La última fórmula se conoce como el Teorema de Abel-Liouville. Permite obtener información sobre las soluciones de la ecuación diferencial, sin conocer explícitamente las soluciones. Por ejemplo, conociendo una solución x_1 permite obtener otra solución x_2 linealmente independiente de x_1.

3. Calcular el determinante de la transformación de Lorentz definida en las aplicaciones de la práctica 3. Deducir, utilizando lo visto en las aplicaciones de la Práctica 4, que la transformación de Lorentz es una rotación en el espacio de Minkowski. Hallar el espacio que queda fijo por lo rotación.