

## ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano de 2012

### Práctica 3 - Matrices

- Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , calcular:
  - $A + 3B - 3C$ .
  - $A + 3(B - C)$ .
  - $A - (B - 2C)$ .
  - $A - B + 2C$ .
- Se consideran matrices de los siguientes tamaños:  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{5 \times 7}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{7 \times 5}$ . Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.
  - $A \cdot B$ .
  - $B \cdot A$ .
  - $B \cdot C$ .
  - $C \cdot B$ .
  - $A \cdot B \cdot C$ .
  - $B \cdot C \cdot A$ .
  - $A \cdot A$ .
  - $B \cdot C \cdot B \cdot C$ .
- Cuando sea posible, calcular  $A \cdot B$  y  $B \cdot A$ . ¿Vale la igualdad entre estos productos?
  - $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
  - $A = (1 \ 2 \ 3)$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
  - $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ .
- Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , calcular:
  - $A^2$ .
  - $B^3$ .
  - $-2A^2 + B^3A$ .
- Mostrar, dando un contraejemplo, que la propiedad " $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$  ó  $B = 0$ " no es válida para matrices.
- Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  analizar si son válidas (para matrices) las fórmulas clásicas de factorización:
  - $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$ .
  - $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ .
- Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Calcular:
  - $A^t$  y  $B^t$ .
  - $(A \cdot B)^t$  y  $B^t \cdot A^t$ .
- Dar ejemplos, si existen, de matrices  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tales que  $A \neq 0$  y  $A \neq I$  (distinta de la matriz nula y de la matriz identidad) que cumplan:
  - $A^2 = I$ .
  - $A^2 = 0$ .
  - $A^2 = A$ .
  - $A \cdot B = B \cdot A$  para toda matriz  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

9. Calcular, si es posible, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices verificando que la matriz hallada es efectivamente la inversa.

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (d) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (f) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Verificar que las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  son inversibles y calcular:

- (a)  $A^{-1}$  y  $B^{-1}$ .  
 (b)  $(AB)^{-1}$  y  $B^{-1} \cdot A^{-1}$ .

11. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , verificar que:

- (a) si  $ad - bc \neq 0$ , entonces  $A$  es inversible con inversa  $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .  
 (b) si  $ad - bc = 0$ , entonces  $A$  no es inversible.

12. Considerar el sistema lineal

$$S: \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Reescribir el sistema como producto de matrices (notación matricial). Hacer lo mismo para el sistema homogéneo asociado.

13. Reescribir, mostrando las ecuaciones, el sistema lineal  $A \cdot x = b$  en cada uno de los siguientes casos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

14. En cada uno de los siguientes casos hallar **todas** las matrices  $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  o  $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , según corresponda, tales que:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}. \quad (d) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. Hallar **todas** las matrices  $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  que verifican  $A \cdot X + 2X = B^t \cdot X + \frac{1}{2}C$  para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

16. Hallar **todas** las matrices  $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  que verifican  $A \cdot X = 2X + B^t$  para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$